KUČERA O.

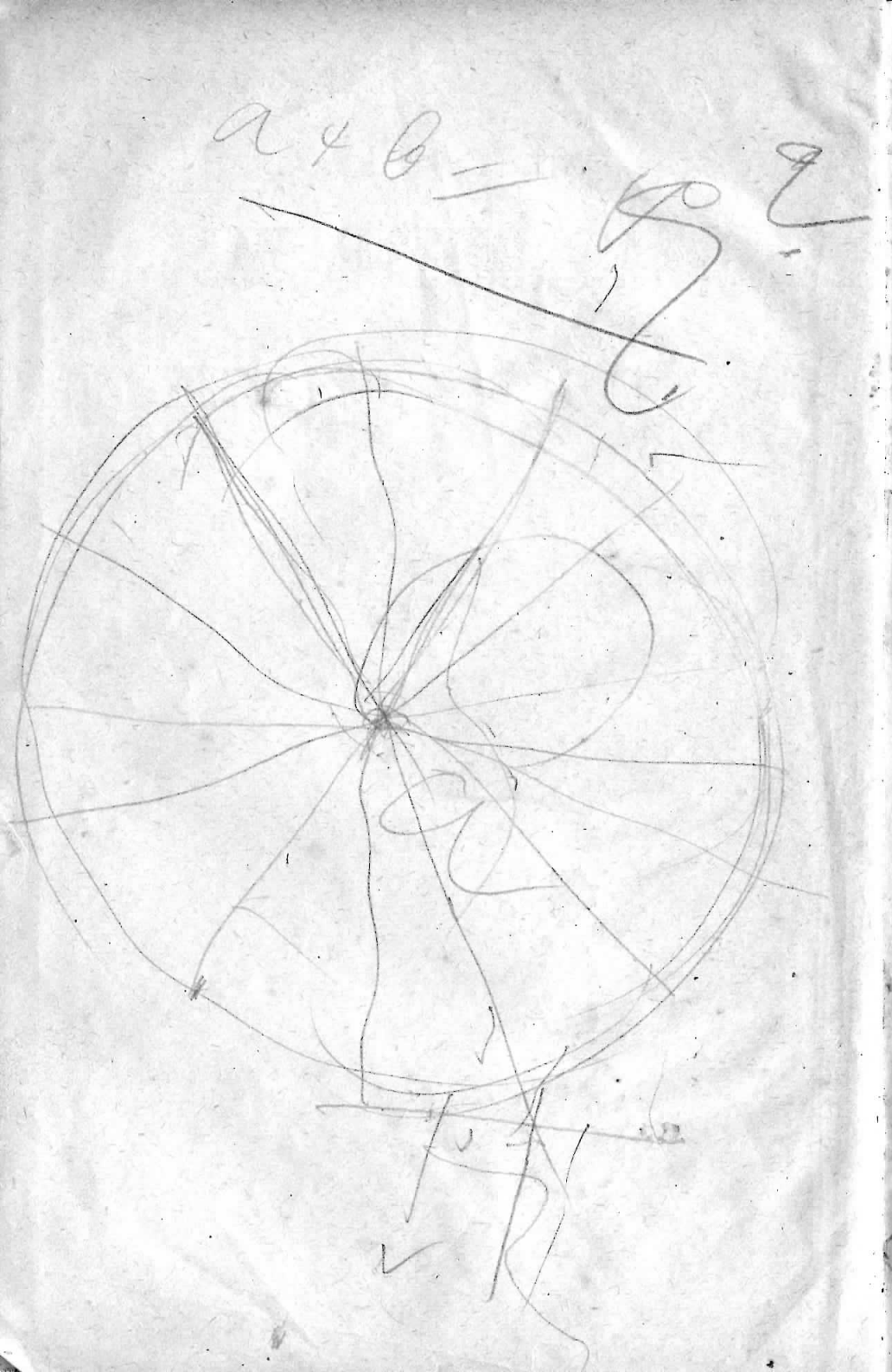
ZBIRKA

PRIMJERA I ZADAĆA

Zagreb
1900

Kr. sveučilišna knjižara Fr. Suppanić
(R. F. Šmer)

25330



METODIČKA

ZBIRKA PRIMJERA I ZADAĆA

IZ

OPĆENE ARITMETIKE I ALGEBRE

S OSOBITIM OBZIROM NA PRIMJENE

U GEOMETRIJI, FIZICI I KEMIJI.

Za više razrede srednjih i njima sličnih škola

sastavio

DR. OTON KUČERA

profesor u kr. realnoj gimnaziji zagrebačkoj i učitelj u mudroslovnom fakultetu kr. sveučilišta Franje Josipa I.

Ukoričena stoji ova knjiga 3 krune.

ZAGREB

NAKLADOM KR. SVEUČILIŠNE KNJIŽARE FRANJE SUPPANA (R. F. AUER)

1900.

Tisak Antuna Scholza n Zagrebu.

Predgovor.

Pisac ove knjige više je od dvadeset godina naučao matematiku u višim razredima hrvatske gimnazije, realke i realne gimnazije. U tom je vremenu iz različnih zbiraka, časopisa i programa, koji su mu dopali ruku, sabrao oveliku zbirku primjera i zadaća iz svih grana elementarne matematike, pa je te primjere za primjenu u školskoj obuci izradio.

Ova je knjiga metodički poređan izvadak iz te zbirke, te se prislanja njegovoj knjizi »Općena aritmetika i algebra za više razrede srednjih i njima sličnih škola«, Zagreb, 1899. (IV. 360), s kojom čini jednu cijelost. Tê se knjige tiču i citati na čelu odsječaka u ovoj zbirci; no samo se od sebe razumije, da se zbirka može upotrebljavati i uz svaku drugu knjigu. Budući da pisac pristaje uz mišljenje, da se kod izbora matematičnih zadaća treba obazirati na srodna područja obuke i tijem prinositi koncentraciji obuke u srednjoj školi, osobito se je osvrtao na fiziku, kemiju i geometriju i s te strane mu se zbirka razlikuje od većine zbiraka, koje su se do sad upotrebljavale u našim srednjim školama.

Broj je primjera i zadaća tolik, da će učitelj moći sastaviti 3 godišnja tečaja, pa će se morati tek svake četvrte godine vraćati na iste primjere. Zadaće za ponavljanje određene su u prvom redu za ponavljanje važnoga matematičkoga gradiva u najvišem razredu, kada učenici već znaju koliko treba iz fizike i geometrije. Preteških zadaća za učenike i trivijalnih primjera u zbirci nema.

Pisac se nada, da će ova zbirka, koja je izišla iz mnogogodišnje školske prakse, u svezi s gore spomenutom naučnom knjigom njegovom, dobro moći poslužiti racionalnoj i temeljitoj školskoj obuci aritmetike i algebre, no možda će se njome moći okoristiti i samouci.

Glavne zbirke, iz kojih su ušli primjeri i zadaće u ovu knjigu, jesu: Schubertova, Heisova, Fenknerova, Richterova, zatim knjige od Bertranda i Rouchéa i dr. Tek nekoliko je primjera potpisani sâm sastavio.

Resultati i najnužnije upute izaći će naskoro u posebnom sveščiću.

U Zagrebu 15. rujna 1900.

Dr. O. K.

Prvi odsječak.

Pristup.

§. 1. O brojenju, brojevima i zadaćama aritmetike.

§. 1. A.

1) Kod kojih se igara još danas upotrebljavaju „prirodne slike brojeva?“.

2) Kako prikazuju zvonca na urama brojeve od 1 do 12?

3) Koji je narod staroga vijeka za prva tri ili četiri broja imao prirodne slike brojeva?

4) Jamblichus pripovijeda, da su Grci u najstarije doba brojeve prikazivaliređajući crtu uz crtu. Kakove su slike brojeva po tom imali Grci u najstarije doba?

5) Titus Livius pripovijeda u svojoj rimskoj povjesti (VII, 3.), da su po prastarom zakonu u svetištu Minervinom, koja da je izumila brojenje, svake godine zabili po jedan čavao, da prikažu broj godina. Na istom se mjestu pripovijeda, da su i u hramu Volsinijskom pokazivali čavle, koje su zabijali Etruščani kao znakove za broj godina. U koliko je taj običaj prema najprirodnijem načinu brojenja?

§. 1. E. i F.

6) Kako se piše suma, kojoj su sumandi a i b?

7) Što izlazi, ako se: a) e suptrahira od f, b) e multiplicira s f, c) e dividira **na** f, d) e dividira **u** f, e) adira $2c$ i $3d$, f) $6m$ dividira **na** p, g) m dividira **na** $6p$, h) 3 dividira **u** x, h) y umanji **za** z?

8) Izrazi aritmetički: a) da treba a uvećati za b, b) da treba xy dividirati **na** z, c) da treba a suptrahirati od 100, d) da treba p postostručiti.

9) Kako se piše diferencija od a i b, ako je a veći od b, a kako, ako je a manji od b?

10) Koji je broj a) za 5 veći od n? b) za n veći od 5? c) za 4 manji od c? d) za a manji od p? e) za $4p$ manji od $5x$? f) za $10a$ veći od $5b$?

11) Napiši aritmetički: a) produkt, kojemu su faktori 5 i $2p$, b) produkt, kojemu su faktori $n+1$ i $n-1$, c) produkt, kojemu su faktori $9a+b$ i a, d) produkt, kojemu su faktori $a+b+c$ i $a+b+c$.

12) Koji je broj a) deset puta tako velik kao a? b) trostruko od $a+b$? c) četvrti dio (četvrt) od nx? d) četvrt od $n+x$? e) sto puta tako velik kao $a-b$? f) polovina od $a+b+c$?

13) Kako se piše aritmetički: a) da treba sumu od a i b multiplicirati s c i dobiveni produkt uvećati za deseti dio od d? b) da treba produkt od a i c uvećati za c i dobivenu sumu multiplicirati s brojem d umanjenim za 10?

14) Što su ovi sastavljeni izrazi:

a) $a-(b+c)+(b+c)$;
b) $a:(bc)-bc$;
c) $a-b-c+(b-c)$;
d) $a(b+c)-ab+ac$;
e) $(a+b)(c+b)(a+c)$;
f) $(a-b)(c-b)(a-c)$;
g) $(a+b)c-[a-(b-c)]$;
h) $a-(bc-ac+bc)$.

15) Ispitaj (analiziraj) ove sastavljene izraze:

a) $x+4y-(z-1)$;
b) $(x-4y):(z-1)$;
c) $x-(4y:z-1)$;
d) $(x-4)y:(z-1)$;
e) $x-4[y-(z-1)$;
f) $(x-4):(y-z+1)$;
g) $(x+4)(y-z)+1$;
h) $x+4y-(z+1)$.

16) Analiziraj ove sastavljene izraze:

a) $[10x-y+5z-(3+4z)](9+x-pq)$;
b) $[5(x-y+5z)+3-(z-1)]:(x-9+pq)$;
c) $(5x-y-5z+18-73a+b)-(a+b+c):4$;
d) $10\{[10-(10-a)]\,10+10\}-5(10+a)$.

Uzorak

za ispitivanje (analiziranje) sastavljenih aritmetičkih izraza.

Izraz $(x-4y):(z-1)$ je kvocijent, u kojemu je dividend diferencija s minuendom x i suptrahendom $4y$. Divizor je također diferencija s minuendom z i suptrahendom 1.

---

17) Supstituiraj (umetni) u izrazu:

$$x-(100-x)+2(x-50)$$

za x broj a) 60, b) 83, c) 90, d) 99 i izračunaj izraz, koji tijem postaje.

18) Izračunaj izraze:

a) $ab-c+d$;
b) $ab-(c+d)$;
c) $a(b-c)+d$;
d) $a(b-c+d)$;
e) $a[b-(c-d)]$;
f) $ab-(c-d)$;
g) $ab-c-d$;
h) $a(b+c+d)$;
i) $a(b+c-d)$;

za ove vrijednosti (supstitucije):

$\alpha)$ $a=100$, $b=50$, $c=20$, $d=10$;
$\beta)$ $a=200$, $b=50$, $c=40$, $d=20$;
$\gamma)$ $a=48$, $b=25$, $c=16$, $d=4$;
$\delta)$ $a=1000$, $b=100$, $c=10$, $d=1$.

19) Izračunaj izraze:

a) $a-[b-c+(d-e)]-(f-g+h)$;
b) $a-(b-c-d)+[e-f+(g+h)]$;
c) $a-b+(c+d+e)-(f-g+h)$;
d) $a-\{b-[c+d+e-(f+g)]+h\}$;

za ove vrijednosti:

$\alpha)$ $a=99$, $b=49$, $c=25$, $d=13$, $e=8$, $f=5$, $g=4$, $h=4$;
$\beta)$ $a=400$, $b=206$, $c=110$, $d=62$, $e=38$, $f=25$, $g=20$, $h=16$;
$\gamma)$ $a=250$, $b=131$, $c=70$, $d=41$, $e=26$, $f=19$, $g=15$, $h=14$;
$\delta)$ $a=379$, $b=190$, $c=94$, $d=46$, $e=23$, $f=10$, $g=4$, $h=1$.

20) Izračunaj izraz:

$$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3$$

za supstitucije:

$\alpha)$ $a_1=200$, $a_2=20$, $a_3=2$, $b_1=10$, $b_2=5$, $b_3=5$;
$\beta)$ $a_1=1728$, $a_2=222$, $a_3=50$, $b_1=100$, $b_2=10$, $b_3=1$;
$\gamma)$ $a_1=444$, $a_2=333$, $a_3=222$, $b_1=64$, $b_2=30$, $b_3=6$.

*

21) Izračunaj izraze:

a) $(3ab - 2ac + 9bc)\,x$; d) $(4ab - ax - bx)\,c$;
b) $(9ab - 7ac - bc)\,(x + 1)$; e) $[6ab - c\,(a - b)]\,(2x - 1)$;
c) $[8ab - (6ac - bc)]\,(x + 2)$; f) $[7a(b - c) - b(a - c)]\,(3x - 2)$;

za supstitucije:

$\alpha)$ $a = 3,\ b = 2,\ c = 1,\ x = 1$;
$\beta)$ $a = 15,\ b = 3,\ c = 2,\ x = 1$;
$\gamma)$ $a = 10,\ b = 9,\ c = 8,\ x = 4$;
$\delta)$ $a = 20,\ b = 13,\ c = 2,\ x = 3$.

22) Izračunaj izraze:

a) $3a : b\,.\,(2b : c)$; d) $a : b - b : c$;
b) $4a : (2b)\,.\,(b : c)$; e) $15a : (3b)\,.\,(3b : c)$;
c) $3a : b + b : c$; f) $15a : (3b) + 3b : c$;

za ove vrijednosti slova:

$\alpha)$ $a = 24,\ b = 8,\ c = 4$; $\delta)$ $a = 200,\ b = 10,\ c = 2$;
$\beta)$ $a = 72,\ b = 9,\ c = 3$; $\varepsilon)$ $a = 700,\ b = 14,\ c = 2$;
$\gamma)$ $a = 100,\ b = 20,\ c = 5$; $\zeta)$ $a = 40,\ b = 20,\ c = 20$.

---

23) Supstituiraj $5b - 3c$ za a u izrazima:

a) $4a - b + c$; e) $4\,(c + a - b)$;
b) $7\,(a - b) - 3c$; f) $b + c : (3a)$;
c) $8 : a + b - c$; g) $7\,(c - b - 3 : a)$;
d) $c\,.\,a + (b - c)\,c$; h) $9\,(a - b) + (c - b)$.

24) Supstituiraj $a + b$ za x i $a - b$ za y u izrazima:

a) $4x + 5y - z$; d) $4y + z - (x - z) + 13$;
b) $9\,(x + 4) + 7y - z$; e) $x : y + x : z$;
c) $3y - x + 5z$; f) $3 : x - 5 : 7\,.\,y$.

25) Poradi kraćega pisanja umetni p mjesto $a + b + cd$ i q mjesto $a - b + cd$ u izrazu:

$[4\,(a + b + cd) + m\,(a + b + cd)]\,(a - b + cd)\,(a - b + cd)$.

§. 2. Jednadžbe, nejednadžbe i aksiomi.

§. 2. A.

1) Ispitaj, jesu li jednadžbe, što dolaze, prave za $x = 5$, pa ako nisu, metni na mjesto znaka jednakosti znak nejednakosti, koji treba da bude tamo:

a) $3x = 2\,(x + 1) + 3$; c) $20 - (x + 5) = 3x - 4$;
b) $10 : x + x = 7$; d) $[8\,(x + 1) - 47]\,x = 5$;
e) $11 = 3\,(2x - 9) + 2\,(19 - 3x)$;
f) $5.2.\,(6 - x) : 10 = 20 : (x + 5) - 1$.

2) Ispitaj isto tako jednadžbe:

a) $4y - (10 + 2y) = 2(y - 5)$; c) $8y - (y - 8) = 8\,(y + 1) - y$;
b) $y : 4 + y : 5 = 9y : 20$; d) $10y - 150 = 2y + 10$;

za supstitucije:

$\alpha)$ $y = 20$, $\beta)$ $y = 40$, $\gamma)$ $y = 100$, $\delta)$ $y = 120$.

3) Ispitaj jednadžbe:

a) $ab - a + 6c = 13a$; c) $(b + c - a)\,a + c = bc$;
b) $(a + b + c)\,(a + b - c) = 421$; d) $ab : c = 3b : 2$;
e) $(a + b + c)\,(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2$;

za $a = 12,\ b = 10,\ c = 8$.

4) Ispitaj jesu li za $x = 5$ prave nejednadžbe:

a) $4\,(x + 2x + 1) > (x + 2)\,(x + 4)$;
b) $x < (4x + 5) : x$;
c) $5\,(x + 1) > 5x + 1$.

5) Izrazi aritmetički: a) da je x jednak ili veći od 9, b) da y ne može da bude veći od $x + 4$, c) da z na svaki način nije jednak 25

6) Što treba umetnuti za x, da budu prava ova uspoređenja?

a) $4 + x \gtreqless 7$; b) $9 + 2x \lesseqgtr 19$; c) $8 \gtrless 19 - x$.

7) Zna se, da je $x \gtreqless 5$. Što se onda može tvrditi o izrazima:
a) $x + 7$; b) $x - 4$; c) $100 + x$; d) $3x$; e) $3x + 7$; f) $50 + 4x$.

8) Neka se adiraju jednadžbe:

$$4.\ x = a + b \quad \text{i}$$
$$16 = c + d.$$

9) Zna se, da je $3.\ x + 5 = 26$ jednadžba, koja je prava za $x = 7$. No i $28 = 4.\ x$ je jednadžba, koja je prava za $x = 7$. Ispitaj je li za $x = 7$ prava i ona jednadžba, koja izlazi a) adicijom, b) multiplikacijom onih jednadžbi.

---

§. 2. B.

10) Ispitaj, ima li brojeva, koji učine krivima jednadžbe, što dolaze, ako se u nje umetnu:

a) $4x^2 + 7 = 11$;

b) $(x+5)(x+1)=x(x+6)+5$;
c) $x:x=(x+3):(x+3)$;
d) $24:(x+1)=12$;
e) $18=8x+15-4(x+1)+7$;
f) $(2x+1)(2x-1)=4x^2-1$;
g) $(2x+3)5-15=12x-(x+x)$;
h) $(27x^3-8):(3x-2)=9x^2+6x+4$.

Koje su od ovih jednadžbi prema tomu identične?

11) Kako se mogu prevesti u obični govor identične jednadžbe (formule)?

a) $a+(b+c)=a+b+c$;
b) $a+(b-c)=a+b-c$;
c) $a-(b+c)=a-b-c$;
d) $a-(b-c)=a-b+c$;
e) $a(bc)=abc$;
f) $a(b:c)=ab:c$;
g) $a:(bc)=a:b:c$;
h) $a:(b:c)=a:b\,.\,c$.

12) Prevedi formule pod brojem 11) obrnuto t. j. tako, da najprije desnu, pa onda lijevu stranu identične jednadžbe prevodiš.

13) Kako bi se mogle reći riječima formule:

a) $(a+b):d=a:d+b:d$, b) $(a-b):d=a:d-b:d$.

14) Odredi kušanjem jesu li jednadžbe, što dolaze identične ili ne:

a) $x^2+12=7x$;
b) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$;
c) $(a+b+c)(a-b)=ac-bc$;
d) $a(b+c-d)=ab+ac-ad$.

15) Pogodi vrijednosti nepoznanica u jednadžbama:

a) $2x=3x-3$;
b) $2x-(x+1)=4$;
c) $8:x=x:2$;
d) $9x-5=2(4x+1)$;
e) $x\,.\,x=16$;
f) $3=2x-(x:2+3)$;
g) $x(x+1)=30$;
h) $x^2+10=7x$;

16) Pogodi makar koje vrijednosti nepoznanica x i y u jednadžbama:

a) $3x+y=25$;
b) $9x=y$;
c) $x^2=(y+1)x$;
d) $(4x+y)(2+x)=15$;
e) $(x+y)(x-y)=15$;
f) $4:x+20:y=6$;
g) $60:x-y:x=28$;
h) $9-(x+y)=3xy$.

§. 2. c.

U zaključcima, što dolaze, zabilježi ispod crte, koja se čita s „dakle“, znakove ispoređivanja $=$, $>$ ili $<$:

17) $a>b$ / $b=c$ / $a\quad c$

18) $x<v$ / $v=q$ / $x\quad q$

19) $y>7$ / $a=7$ / $a\quad y$

20) $a=e$ / $e=f$ / $a\quad f$

21) $p>q$ / $q>3$ / $p\quad 3$

22) $a>4$ / $b<4$ / $b\quad a$

23) $a<b$ / $b<c$ / $a\quad c$

24) $a<13$ / $v>13$ / $a\quad v$

25) $a=b$ / $b>d$ / $a\quad d$

26) $b=a$ / $a<11$ / $11\quad b$

27) $c>a$ / $a>f$ / $a\quad f$

28) $4<7$ / $4>c$ / $c\quad 7$

29) $13\,m<a\,m$ / $a\,m=b\,m$ / $13\,m\quad b\,m$

30) $4\,kg=a\,kg$ / $a\quad <b$ / $4\,kg\quad b\,kg$

31) b sati $<a$ sati / $b\quad <c$ / b sati $\quad c$ sati.

Umetni prave znakove ispoređivanja kod ovih zaključaka:

32) $a^0=90^0$ / $b^0<a^0$ / $c^0<b^0$ / $c^0\quad 90^0$

33) $b<c$ / $c=d$ / $d=e$ / $b\quad e$

34) $a>13$ / $13\,l>c\,l$ / $c\,k>d\,k$ / $a\quad d$

Drugi odsječak.

Računske operacije prvoga stupnja.

§. 3. Adicija i zakoni adicije.

3 krune + 4 krune = 7 kruna.

$3 + 4 = \cdot\ \cdot\ \cdot + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = \vdots\ \vdots\ \vdots\ \cdot$

I. Zakon komutacije: $a + b = b + a$.

II. Zakon asociacije: $a + (b + c) = a + b + c$.

---

§. 3. A.

1) Sastavi slike brojeva $\vdots\ \vdots\ \vdots$ i $\vdots\ \cdot\ \vdots$ u jednu sliku broja, pa mu reci, hrvatsko, njemačko, latinsko, francusko i talijansko ime.

2) Netko ima da adira 25 kr. i 14 kr., pa kaže, da je rezultat 39. Zašto je ovaj odgovor netočan?

3) Za koliko je suma veća od jednoga svoga sumanda?

4) Koji adend treba da se adira broju, a) da izađe kao suma bližnji broj u prirodnom nizu brojeva, b) da izađe drugi broj u nizu?

5) a) Što daje 8 klupa + 7 klupa? b) zašto je netočno pisanje 8 + 7 klupa? c) bi li se smjelo napisati: „(8 + 7) klupa“?

6) Kako se zove broj, a) koji je za 6 veći od p? b) koji je za p veći od 6?

---

§. 3. B.

7) $a = b$, $c = 4$ (+)

8) $a = 9$, $b = c + d$ (+)

9) $a = b + c$, $e = f + g$ (+)

10) $a + b = 4$, $c = x + 5$ (+)

11) $a = b$, $c = f$ (+)

12) $a = 12$, $b = c + d$ (+)

13) $a = b + c$, $d + e = 19$ (+)

---

§. 3. C.

Upotrijebi zakon komutacije ili zakon asociacije ili oba zakona, da **najzgodnijim načinom** izračunaš:

14) $25 + (4 + 75)$.

15) $97 + 11 + 3$.

16) $23 + 44 + 77$.

17) $13 + 14 + 15 + 16 + 17$.

18) $44 + [9 + (6 + 41) + 100]$.

19) $4 + (996 + 782)$.

20) $25 + (83 + 75)$.

21) $999 + 589 + 1$.

22) $3472 + 18 + 582$.

23) $40 + 1254 + (60 + 746)$.

24) $91 + 92 + 8 + 9$.

25) $14 + 15 + 16 + 24 + 25 + 26$.

26) $43 + [8 + (7 + 42) + 50]$.

27) $446 + 724 + (30 + 800) + 566 + (337 + 34)$.

28) $9960 + 7473 + [27 + (20040 + 500)]$.

29) a) $\frac{1}{12} + 1 + \frac{7}{12}$; b) $0{\cdot}17 + 3 + 2{\cdot}83$; c) $0{\cdot}25 + 4 + 5\frac{3}{4}$.

30) a) $3 + 0{\cdot}64 + 2 + 0{\cdot}36$; b) $5 + \frac{10}{19} + 3 + 1\frac{9}{19}$; c) $1{\cdot}625 + 11 + 12\frac{3}{8} + 13$.

---

§. 3. D.

31) $e > 12 + b$, $f = 4$ (+)

32) $a + b < 7$, $c = 4$ (+)

33) $b + 8 < 20$, $2 < 5$ (+)

34) $a > 15$, $b + c > 3$ (+)

35) $a + b < c + d$, $e + (f + g) < x + y$ (+)

36) $x + [y + (z + u)] = 20$, $v > a + b$ (+)

37) $x \leqq 7$, $x = 8$ (+)

38) $9 = a + b$, $7 \geq c$ (+)

39) $a + b < 7$, $c \leqq 4$ (+)

40) $a \geqq 11$, $a' \geqq 9$ (+)

41) $a + b \geqq c + d$, $e + f > g$ (+)

42) $x \leqq y + z$, $u + (v + z) \leqq 13$ (+)

---

§. 3. F. G.

43) Riješi zagrade u izrazima:

a) $p + (q + v)$;

b) $a + (b + c + d)$;

c) $a + [5 + (b + c)]$;

d) $e + (f + g) + [h + (i + k)]$;

e) $a + \{b + [c + (d + e)]\}$.

44) Koliko članova ima suma $a + (b + c) + (d + e + f)$ a) prije rješenja zagrada? b) poslije rješenja zagrada?

45) Za koliko naraste suma dvaju sumanda, ako se jedan sumand uveća za 7, a drugi za 3?

46) Izračunaj za $a=10$, $b=8$, $c=6$, $d=2$ izraze, što dolaze a) prije, b) poslije riješenja zagrada:
a) $a+(b+c+d)$; c) $a+[b+(d+c)]$;
b) $a+b+(c+a+d)$; d) $a+(a+b)+(a+c+d)$.

47) Izračunaj za $a=7$, $b=8$, $c=9$, $d=10$ izraze, što dolaze, a) prije, b) poslije riješenja zagrada:
α) $a+(b+a)$; β) $b+c+(a+d)$;
γ) $a+b+(b+c+d+a)$; δ) $a+[a+(a+b+c)]$;
ε) $a+(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)$.

---

§. 3. H.

48) Koliko članova ima suma $a+a+a+a+a+a+a$ i kako se napiše kratko i kako se zove koeficijent, koji se pri tom pokazao?

49) Ujednostruči izraze:
a) $4a+9a$; d) $9x+3x+5x$;
b) $16b+9b$; e) $37y+(3y+60y)+190y$;
c) $4(a+b)+11(a+b)$; f) $4a+(3a+7a+5a)+a$.

Ujednostruči s pomoću zakonâ komutacije i asociacije, pa s pomoću općenoga pravila asociacije i kratkoga pisanja suma **što više** ove izraze:

50) $5a+7b+8a$. **51)** $9b+11a+7b+2a$.
52) $19p+(3q+4p)$. **53)** $27x+(3y+4z+3x)$.
54) $74m+6p+(8m+9p)$. **55)** $4a+3b+b+(b+7a)$.
56) $711x+3y+89x+(17y+4x)+(96x+100y)$.
57) $15a+[7b+(3a+4b)]+[8a+(7a+b)]+3b$.
58) $4x+(7y+3z)+(8x+9y+16z)+[4x+(13y+2z)]$.
59) $77p+7q+r+p+(4p+r)+(8q+9)+(r+4p)$.
60) a) $10a+3c+6b+7c+4b$;
b) $12x+11y+10z+11y+12z$;
c) $123p+234r+345p+456q+567r$;
61) a) $p+3q+5r+7p+9q+11r$.
b) $12m+10n+8q+6m+4n+2q$;
c) $101a+212b+323c+343c+232b+121a$.
62) a) $8a+2c+5+4b+9c+3a+6+7b$;
b) $a+2b+3c+4d+4d+3c+2b+a$;
c) $13p+24q+35r+46s+76q+65r+87p+54s$.
63) a) $\frac{5}{3}a+\frac{3}{4}b+\frac{7}{3}a+3+\frac{5}{4}b$;

b) $\frac{4}{5}x+\frac{5}{6}y+7+\frac{1,1}{5}x+\frac{1,3}{6}y$;
c) $\frac{1,1}{1,3}x+\frac{1,5}{1,7}y+2z+\frac{1,9}{1,7}y+\frac{1,5}{1,3}x$.
64) a) $0{\cdot}71a+6{\cdot}13+9{\cdot}17b+9{\cdot}29a+0{\cdot}83b+3{\cdot}87$;
b) $0{\cdot}12x+2{\cdot}34y+0{\cdot}56z+0{\cdot}66y+2{\cdot}44z+2{\cdot}88x$;
c) $0{\cdot}123p+4{\cdot}56q+78{\cdot}9r+5{\cdot}43q+21r+0{\cdot}876p$.
65) Koji zakon adicije upotrebljava latinski jezik, kada s riječima „septuaginta quattuor“ i „quattuor et septuaginta“ označuje isti broj?
66) Na šiljastom je krovu 100 redova opeka; u prvom 1, u drugom 2, u trećem 3 itd., u posljednjem 100 opeka. Kako ćeš najzgodnije odrediti, koliko je opeka na tom krovu?

§. 4. Suptrakcija.

I. Prva definicija: $(a-b)+b=a$.
II. Druga definicija: $(a+b)-b=a$.
III. $5a-3a=2a$.
IV Pravilo transpozicije prvoga stupnja:
Iz $x+a=b$ izlazi $x=b-a$;
Iz $a+x=b$ izlazi $x=b-a$;
Iz $x-a=b$ izlazi $x=b+a$;
Iz $a-x=b$ izlazi $x=a-b$.

§. 4. A. B. C. D. E. F.

1) Kakovu operaciju izvodi latinski jezik, kada za 18 veli „duodeviginti“?
2) Kako je dugo postojala perzijska država, koju je godine 559. pr. K. utemeljio Cyrus, a g. 330. pr. K osvojio Aleksander Veliki?
3) Perikles je 15 godina bio na čelu atenske države i to od godine 444. pr. K. do svoje smrti. Kada je umr'o?
4) Attika je imala u starom vijeku oko 700.000 stanovnika, a danas ih ima oko 640.000 manje. Koliko stanovnika ima danas Attika?
5) Kako so zove broj: a) koji adiran k 8 daje 14? b) koji je za 8 veći od 14? c) koji, uvećan za d, daje s? d) koji, adiran k d, daje s?
6) U čem se sastoji proba suptrakcije kod izvedene suptrakcije?
7) a) Za koliko koraka treba da ideš natrag u brojnoj crti (§. 1.

B. str. 2.) od s, da dođeš do broja 6? b) Kolik treba da bude najmanje s, da ovo pitanje ima smisla?

8) Zna se, da je suma dvaju brojeva p, i da je jedan od njih q, kako treba aritmetički izraziti drugi broj?

9) Balon se najprije digne a m visoko, onda još b m više, zatim pane b m i opet se digne c m. Kako je visoko na koncu?

10) Za koliko je a veći od $a - b$?

11) Neki je broj za q veći od $p - q$; koji je taj broj?

Ujednostruči s pomoću pojma suptrakcije ove izraze:

12) $u - v + v$. **13)** $u + v - v$. **14)** $p + q + r - r$.

15) $v + u + x - x - u$. **16)** $a - b + c + b$. **17)** $a + a - a$.

18) $16 + b - 16 + c - b$. **19)** $p + 14 + 3 - 17$.

20) $2 + (a + b) - (a + b)$. **21)** $m - (a - b) + (a - b) + c - c$.

22) $5a + b - b$. **23)** $5a + 11b - 11b$. **24)** $9a + 6b - 5c + 5c$.

25) $m - 3a - 5a + 8a$. **26)** $x - (y + 3z) + (y + 3z)$.

27) $m + 3a + 5a - 8a$. **28)** $11a + 4a + 7b - 15a$.

29) $7 - 2b + (b + b)$.

30) $4a + 7b + 3a - (2a + 5a) + 3b - 7b + 4c - 4c$.

---

§. 4. D.

Izvedi naznačene suptrakcije:

31) $a = b$ / $x = 5$ / (−)

32) $a = b + c$ / $d = c$ / (−)

33) $a = 7b$ / $c = 3b$ / (−)

34) $x = y$ / $5 = 5$ / (−)

35) $x = a + b$ / $b = b$ / (−)

36) $a + b = c$ / $a = d$ / (−)

37) $x = a + b$ / $y = 4$ / (−)

38) $3a = 4b$ / $2a = c$ / (−)

39) $a = 4(b - c)$ / $x = 3(b - c)$ / (−)

---

40) Koja nejednadžba treba da postoji, da $v - u$ ima smisla?

41) Koje nejednadžbe treba da postoje, da imaju smisla ove diferencije: a) $x - 19$, b) $x - a$, c) $b + c - a$, d) $4x + 5 - 8$?

---

§. 4. F.

Suptrahiraj kratko pisane sume i ujednostruči što više izraze:

42) $7x - 4x$. **43)** $27p - 13p$. **44)** $4p + 21p - 5p$.

45) $8x + 5x - 4x$. **46)** $9y - 2y + 7y$.

47) $4a + 7a - 3a + (4b - 3b)$. **48)** $6(a + b) - 4(a + b)$.

49) Ujednostruči izraze:

a) $5x + 7y + 3x - 4x$; b) $x + [4(y - z) - 3(y - z)]$:

c) $10a + [10b + (10c - 4c)] - 10a$.

50) a) $15a - 7b + 3a - 10b - 8a + 27b$;

b) $28x + 29y + 30x - 31y - 32x + 33y$;

c) $432m + 423n - 324m - 342n + 234m + 243n$.

51) a) $3\frac{4}{5}a + 6\frac{7}{8}b + 9\frac{10}{11}c + 12\frac{13}{14} - \frac{10}{11}c + 2\frac{1}{8}b - \frac{3}{7} + 5\frac{1}{5}a - 3\frac{1}{2}$;

b) $1{\cdot}23x + 2{\cdot}34y + 3{\cdot}45z + 4{\cdot}56 - 0{\cdot}12y - 0{\cdot}02x - 0{\cdot}12z - 0{\cdot}12 - 0{\cdot}1x$;

c) $1\frac{4}{5}p - 2\frac{24}{25}q + 3\frac{124}{125}r - 4\frac{624}{625}s + 3{\cdot}96q - 0{\cdot}8p + 5{\cdot}9984s - 2{\cdot}992r$.

S pomoću pravila transpozicije prvoga stupnja riješi jednadžbe:

52) $x - 15 = 6$. **53)** $x + 20 = 31$. **54)** $25 + x = 100$.

55) $98 - x = 90$. **56)** $424 = x + 399$. **57)** $1000 = 497 + x$.

58) $728 = 1028 - x$. **59)** $625 - x = 433$. **60)** $728 + x = 900$.

61) $x + 24 = 100$. **62)** $x + a = b$ **63)** $x + a = b + c$.

64) $b + c + d - x = b + c$. **65)** $a - x = 2b$. **66)** $3a = x - b$.

67) $89 - x = 6a$. **68)** $x - 4 - 5 = 20$. **69)** $x + 4 + 5 = 20$.

70) $x + 24 - 13 + 67 + 10 = 100$.

71) $x - 4 + 16 + 10 - 35 = 35$. **72)** $x + a - b - c + d + e + f = g$.

73) $x + 3a - 4b + 9c = 11d$. **74)** $25 - (x + 4) = 19$.

75) $25 - (x - 4) = 19$. **76)** $40 = 10 + (x - 11)$.

77) $43 - (43 - x) - 4 = 5$. **78)** $100 = 1000 - [500 + (401 - x)]$.

---

79) Dva se dječaka A i B igraju „pogađati brojeve“. A misli jedan broj, B mu veli neka adira 4 i suptrahira 11; A veli, da je tijem dobio broj 43. Koji je broj A mislio?

80) Ako neki broj, koji mi je na umu, suptrahiram od 16, dobivenoj diferenciji adiram 16, od sume najprije 6, pa onda 3 suptrahiram, dobijem 16. Koji mi je broj bio na umu?

81) Netko potroši od novca, što ga ima sobom, naprije 10 kr. pa onda 13 kr. Kad je poslije toga primio još 19 kr, imao je baš 100 kr. Koliko je novaca imao sobom na početku?

Riješi s pomoću ponovne primjene pravila transpozicije prvoga stupnja još ove jednadžbe:

82) $19-(x+4)=10$. **83)** $100=87+(x+11)$.
84) $19-(x-4)=10$. **85)** $100=87+(x-11)$.
86) $100-(100-x)-50=20$. **87)** $406+[84-(x+10)]=479$.
88) $125-[100-(10-x)]=34$. **89)** $251=723-[412+(66-x)]$.

§. 5. Pravila za prvi stupanj.

I. $a+(b+c)=a+b+c$. IV. $a-(b-c)=a-b+c$.
II. $a+(b-c)=a+b-c$. V. $a-b=(a-n)-(b-n)$.
III. $a-(b+c)=a-b-c$. VI. $a-b=(a+n)-(b+n)$.

§. 5. C. D. E.

Izračunaj na dva načina: a) **prije,** b) **poslije** rješenja zagrada ove izraze:

1) $19-(9+3)$. **2)** $100-(43+3)$. **3)** $80-(30+5+15)$.
4) $103+(7+8-13)$. **5)** $20-(19-5-6)$.
6) $98+(17-5)-(23-5)$. **7)** $103-(7+8-13)$.
8) $20+(48+2+10)-(13+17)$. **9)** $124-(24+53)$.
10) $2000-(400-40)$. **11)** $4723-[700+30+3]$.
12) $1111+(200-40+9)$. **13)** $6000+(879+34-60)$.
14) $47678-(892-20-57)$. **15)** $700-(42+3)+(57-13)$.
16) $8921+(23+56)-(72-2)$.
17) $6123+477-(23+89)-(100-10)+(64-4)$.
18) $7777+23-84-(423-76-72)+(543+7-18)$.
19) $8100+[423-(25+18)]-[72+16-(28-8)]$.
20) $12000+576-[478-(72+16)-(84-14)+(93-7)]$.
21) $5600-428-[123-(85-50)+(23+7)]+[847+26-(13+13)]$.

Razriješi zagrade i izračunaj izraze, što dolaze, sastavivši s jedne strane sve brojeve, koji dolaze iza znaka plus, a s druge strane sve brojeve, koji dolaze iza znaka minus:

22) $13-7+15+19-18-4+37-16+5-7+100$.
23) $84-(65-60)+(57-23-4)+(78+73-16)$.
24) $100-[82+5-(23+15)+(100-4-93)]$.
25) $427+83-[23+(74-16)]+[27-(6+13)-5]$.
26) $203-15-[42-(23+17)+(48-19-9)-18]$.

Razriješi sve zagrade u izrazima:

27) $a-(p-q+r)$. **28)** $a+b-(c+d)+(e-f)$.
29) $13+a-b+(c-d-e-f)$. **30)** $A+B-[C+D+(E-F)]$.

31) $p-(q-v)+(a-b+c)$. **32)** $a+b-[c-(d+e)]$.
33) $20-(v+u)+(a+b-c-d)$

Ujednostruči što više sastavljanjem kratko pisanih suma izraze:

34) $4a+3a-5a+2a$. **35)** $13x-5x+6x+7x$.
36) $8a-4b+7b+3b$ **37)** $100-4b-8b-9b$.
38) $11-6d+9d+3d+9$. **39)** $4a+3a-6b+5b$.
40) $3a-4b+c+7a+3b$. **41)** $4x+3y-x+20y+x$.
42) $3a-4b+c+7a+b-c$. **43)** $5m-m+3p+4m-p$.
44) $7q+(3q+4r)-6r$. **45)** $5a-4a-b+c+2b$.
46) $19a-3b+4c-7c+16a+4b-3c+a$.
47) $4x+5y-3y+4z+6x-19x+y+z$.
48) $3p+4q+r-s+t+4r+192q-13t$.
49) $214u+13z-272u+279v+72u-270v+3z$.

Razriješi zagrade i ujednostruči onda što više izraze:

50) $9a-(5a+b)$. **51)** $19x+(4y-x)$. **52)** $87-(3a+4)-2a$.
53) $4a-7b+(3a-b+c)+4c$. **54)** $27a-(b+c-a)+(4b-c)$.
55) $5x+(x-3y)-(4x-y)+(7x+3y)-(3y+x)+(4x+16y)$.
56) $a-b-c+(a+b-c)+(a-b+c)+(b+c-a)-(a-b)$.
57) $4a-5+(6a-7)-(3a+4)+(6a+15)-(a+1)$.
58) $m+4n+3q-[27m-(25p+24m)-80q]+(94m-n-q)$.
59) a) $3\frac{3}{4}a-(4\frac{4}{5}b-5\frac{5}{6}a-6\frac{6}{7})-(5\frac{1}{5}b-3\frac{1}{7}-\frac{5}{12}a)$;
b) $(325p-523q+235r)-(532p-352r+253q)$;
c) $-(1{\cdot}45x-2{\cdot}54y+3{\cdot}45z)-(4{\cdot}54x-5{\cdot}45y+6{\cdot}54z)$.
60) a) $5a-[(6a-7b)-(8a-9b)]-10b$;
b) $10x+[(11y+12x)-(13y-22x)]-24y$;
c) $319c-[391d-(-913e-931c)]-(-139d-193e)$.
61) a) $[(7\frac{1}{7}x-8\frac{1}{8}y)-9\frac{1}{9}z]+10\frac{1}{10}-[\frac{8}{9}z+(1\frac{7}{8}y-2\frac{6}{7}x)]-10x-3{\cdot}5+10y-6{\cdot}6+10z$;
b) $[(12\frac{3}{4}p-56\frac{7}{8}q)-(90\frac{1}{2}r-34\frac{5}{6}s)]-[(9\frac{1}{2}r-87\frac{1}{4}p)-(65\frac{1}{6}s-43\frac{1}{8}q)]$;
c) $[0{\cdot}12a-(0{\cdot}23b+0{\cdot}34c)]-[0{\cdot}45d+0{\cdot}56+(0{\cdot}32d+0{\cdot}43c-0{\cdot}65a)]-(0{\cdot}54b+0{\cdot}21)$.
62) a) $9x+\{10y+[11z-(12x+13y)]-(14z-4x-2y)\}+3z$;
b) $3a-\{-[-(4b-5c)-(6a-7b)]-[(8b-9c)+3a]\}-(3b-4c)$;
c) $-12{\cdot}45x+\{[6\frac{7}{8}y-(90{\cdot}12z+12\frac{1}{2}\frac{1}{0}x)]-(16{\cdot}875y-80\frac{3}{2}\frac{}{5}z)\}+(25x+10y)$.

Pretvori svaki agregat, što dolazi, s pomoću zagrade u agregat od **samo dva** člana tako, da bude prvi član zadanoga agregata ujedno prvi član novoga agregata, a drugi član novoga agregata, da ima isti predznak, kao i drugi član zadanoga agregata:

63) $a + 3b + 4c + d$. **64)** $p - 3q + v + r + s$.
65) $7m - 3a - 11b - 12c$. **66)** $A - B - C + D + E$.
67) $24 + x + 2y - 3z - u$. **68)** $16 - a + b - c + d - e$.

Smjesti posljednja **tri** člana u agregatima, što dolaze, u zagradu pred kojom je znak plus ili znak minus prema tomu, da li treći član od desnoga kraja ima ispred sebe znak plus ili znak minus:

69) $4a + b + c - d$. **70)** $3p + q + r - 2s - 4t$.
71) $17v - 13z - 4x - y$. **72)** $26 - a + b + c + d$.
73) $4a + a' - b' + c' - d'$. **74)** $e + f - g - h + 10k$.
75) $3a + b - c + d$. **76)** $3p + q - a + b + c$.
77) $a - b - c - 2d$. **78)** $A - B - 2C - 3D + 4E$.
79) $100 - p + 2q - 10$.
80) Mijenjaj kako god možeš red članova, koji dolaze iza prvoga člana, u agregatima prvoga stupnja:
81) $p - a + b - c$. **82)** $p + 2a - b + c$.
83) $p - a - b - c + d$. **84)** $3m - a + 2b + c$.
85) Pretvori na sve moguće načine u agregat od tri člana, a da ne promijeniš red članova, agregat: $7a + 3b + 4c - d - 3e$.
86) Pretvori u diferencije: *a*) s minuendom 15, b) sa suptrahendom 1 ove diferencije:
α) $19 - 7$; β) $34 - 33$; γ) $7000 - 6989$.
87) Pretvori u diferencije sa suptrahendom 1 ove diferencije:
a) $25 - 17$; b) $48 - 47$; c) $1000 - 501$; d) $(a + b) - (a + 1)$.
88) Ujednostruči što više izraze, što dolaze, pošto si u njima izveo supstitucije:
$A = 7x + 3y - z$, $B = 8x - y + 15z$, $C = 16x - y + z$:
a) $A + B + C$; b) $A - B + C$; c) $A - B - C$;
d) $B - A + C$; e) $C - A - B$; f) $C + A - B$.
89) Ujednostruči izraze, što dolaze, umetnuvši u nje: $a = x + 2y - z$, $b = 4x - y + z$, $c = 3x - 5y - z$:
α) $a + b + c$; β) $a - b + c$; γ) $a - b - c$; δ) $b + c - a$.

§. 5. F.

Jednadžbe, što dolaze, neka se riješe tijem, da se u njima najprije razriješe zagrade, onda stegne i napokon transponira:

90) $19 - (x + 4) = 10$. **91)** $19 - (x - 4) = 10$.
92) $57 + (y - 13) = 64$. **93)** $10 - [4 - (3 + y)] = 63$.
94) $100 - (4 - x) = 99$. **95)** $12 + (4 + x) = 32$.
96) $74 + (12 - x) = 80$. **97)** $12 = 4 + (x + 1) - 12$.
98) $3a - (x + a) = a - b$. **99)** $x - (a + b) + 4a = 5b$.
100) $30 + 2.3 = 50 - [18 - (16 - x)]$.
101) $10p - (x + p + q) = 3p + q$.
102) $5e + (6f - x) + (3e - f) = 7e + (3f - 2e) - (e + f)$.

Izvedi naznačene suptrakcije:

103) $a = b$, $4 > 3$ (−) **104)** $a > x + 9$, $f = 9$ (−) **105)** $x = 6$, $4 < 7$ (−)
106) $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, $\alpha > 90^0$ (−) **107)** $a = b + c$, $e < d$ (−)
108) $\alpha + \beta + \gamma < 180^0$, $\alpha > 90^0$ (−) **109)** $a > u + v$, $b < v$ (−)

§. 6. Nula i negativni brojevi.

Definicija: $(a - b) + b = a$ i onda, ako a nije veći od b.

I. Definicija nule: $a - a = b - b = 0$.
II. Definicija negativnoga broja: $a - (a + n) = 0 - n = -n$.
III. $a + 0 = a$; $0 + a = a$; $a - 0 = a$.
IV. $a + (-n) = a - n$; $a - (-n) = a + n$; $(-n) - a = -(n + a)$.

§. 6. E. F. G.

1) Napiši oblike diferencija, koji se mogu izjednačiti s ovim oblicima diferencija:
a) $8 - 8$; b) $9 - 11$; c) $13 - 41$; d) $128 - 400$; e) $428 - 1000$; f) $7100 - 8100$.
2) Koji se znakovi uzimlju za ove oblike diferencija:
a) $20 - 20$; b) $18 - 25$; c) $700 - 920$; d) $a - (a + b)$.
3) Izračunaj:
a) $16 + 0$; b) $0 + 16$; c) $16 - 0$; d) $0 - 16$; e) $0 + 0$; f) $0 - 0$.
4) Zašto se ne smije kod 40 izostaviti nula, dočim se kod $4 + 0$ smije izostaviti znak $+ 0$?

5) Zašto nije običaj pred broj metnuti nulu, te se piše n. pr. mjesto 0713 svagda 713?

6) Izračunaj:
a) $11-(-5)+(-6)-(+3)$; b) $(-27)+(-3)-(-15)$:
c) $-243-(+18)+(-18)$; d) $400+16-(-16)+(-400)$.

7) Za koliko je -7 manje od $+7$?

8) Za koliko je $-n$ manje od $+a$?

9) Za koliko je $-n$ manje od nule?

10) Za koliko je -7 manje od 4?

11) U nekom mjestu je srednja temperatura srpnja $+21{\cdot}2^0$ C., a srednja temperatura siječnja $-1{\cdot}2^0$. Kolika jediferencija srednjih temperatura najtoplijega i najhladnijega mjeseca?

12) a) Vrh je Gaurisankara 8839 m iznad, a površina mrtvoga mora 392 m ispod površine morske; kolika je razlika visina?
b) Iz Zemuna otplove dva broda, jedan 15 km niz Dunav, drugi 27 km uz Dunav. Kolika je daljina obiju brodova (riječne crte)?

13) a) Zagreb ima $45^0 49'$ sjeverne širine, a Kapstadt $33^0 56'$ južne; kolika je diferencija širinâ ovih dvaju gradova?
b) Zagreb je $15^h 59'$ istočno, a Dublin $6^0 20'$ zapadno od Greenwicha; kolika je razlika dužinâ ovih dvaju gradova?

14) a) Augustus je vladao u Rimu od godine 30. pr. Kr. do godine 14. poslije Kr.; koliko je trajala njegova vlada?
b) Đurina ura ide 7 minuta naprijed, a Markova 2 minute natrag; za koliko se razlikuju podaci vremena obiju ura?

15) a) Ivo ima 5 kruna imutka, a Joso 7 kruna duga; za koliko je Ivo bogatiji od Jose?
b) Stjepan i Vladimir imaju jednak broj oraha; u igri s trećim dječakom izgubi Vladimir 8 oraha, a Stjepan dobije 6; za koliko oraha ima sada Stjepan više od Vladimira?

16) a) Jednoga vrućega srpanjskoga dana pokazivao je termometar 32^0 C u dva sata po podne; do drugoga jutra u 4 sata umanjila se je temperatura za 15^0 C, zatim je do 2 sata po podne opet narasla za 9^0 C; za koliko je bila sada manja nego 24 sata prije?
b) Balon se od određenoga časa digne za 400 m, pane opet za 700 m; za koliko je sada niže nego u onom određenom času?
c) Trgovac zasluži 3000 kr. izgubi iza toga 4600 kr.; za koliko se je umanjio njegov imutak?

17) Kako se promijeni rezultat suptrakcije, ako se izmijene minuend i suptrahend?

18) Olovo se tali kod 332^0 C, živa očvršćuje kod temperature niže za 371^0 C. Kod koliko stupanja C očvršćuje živa?

U primjerima, što dolaze, neka se ono, što je dolje, a) **adira** onomu, što je iznad njega, b) **suptrahira** od onoga, što je iznad njega:

19) $-129 + 29$ **20)** $-729 - 271$ **21)** $+841 - 41$ **22)** $710 - 85$ **23)** $-26 \quad 29$

24) $97-85 \quad 3+35$ **25)** $-50-69 \quad -50-31$ **26)** $-a-b \quad +a+b$

27) $-a-b+c+d \quad +a+b+c-d$ **28)** $-a \quad +b$ **29)** $+a \quad -c$ **30)** $-a \quad -b$

31) $-6 \quad +x$ **32)** $-4 \quad +a-3$ **33)** $+5x \quad +3y$ **34)** $-5x \quad -3y$ **35)** $-5x \quad +3y$

36) $-9v \quad +9v$ **37)** $-16x \quad -4y$ **38)** $a-b \quad -2b$ **39)** $3v+1 \quad -4v+5$ **40)** $7a+3 \quad -a-3$

41) $-4a-3x \quad -5a-8x$ **42)** $x \quad -x-y$ **43)** $4a-b-3c+d \quad 4a-b-3c+3d$

44) $4p-q-r \quad -3p+2q+3r$ **45)** $-6x+2y-3z \quad -5x-3y-z$

46) $-3a-b+4c-9d-e+6f \quad -5a+7b-8c-12d+3e$ **47)** $4a-b+3c+9d-f \quad -3a+8c-12d+e$

48) $a-b+c-d \quad -a+b-c+d$ **49)** $4a+3b+c-2 \quad -7a-2b+3125$ **50)** $-4x+y+3z-7 \quad -3x-z-4v$

51) $-102a-b+423c-728d+433e-f+3g \quad +104a-33b-400c+28d+400e+60f+3g$

52) $+14a-3b+29c-1728d-1496e+g-3h \quad -15a+87g-e-272d+423h-40c+3b$

U primjerima, što dolaze, neka se **adiraju** brojevi i izrazi, koji su jedan ispod drugoga:

53)
$+729$
-29
$+200$
-1000
(+)

54)
-4123
-2122
-1000
$+476$
(+)

55)
$-4a$
$-3a$
$+7a$
$+12a$
(+)

*

56) $4a - b + c$
$-3a + b - c$
$+7a - 3b + 4c$ (+)

57) $4x - y - 7z$
$-x + 5y + 19z$
$-16x - y - 87z$ (+)

58) $-p - 3q - r$
$+4p + 7q - 2r$
$+3q + r - p$ (+)

59) $7x + v - u + 13y - z$
$4v - u + 6x - 3y + 7z$
$8u + 6x - y + 17z - 3v$
$-4y - 7x - 3u + 8z - v$ (+)

60) $a - b + 3c - 4d + e - f$
$a - 5c + d - 6e$
$+4b - d + f$
$a + 7b + 8c + 5e$
$-6a - 3b - 6f$
$+4a - b - 8d$ (+)

Supstituiraj u izrazima, što dolaze:

$\alpha)$ $A = -6$, $B = +8$, $C = -9$, $D = +15$;

$\beta)$ $A = 7a$, $B = -3b$, $C = -5c$, $D = -d$;

$\gamma)$ $A = 4x - 3y + z$, $B = -x + y + 5$, $C = 4y + 5z - 26$, $D = 3y - 8$.

61) $A - B + C - D$.

62) $A + B - C + D$.

63) $-A - B + C - D$.

64) $-A + B - C + D$.

65) $A + B - C - D$.

66) $A - B - C - D$.

---

§. 6. G.

Izvedi naznačene suptrakcije i adicije:

67) $16 = 16$
$-5 = -5$ (−)

68) $a > b$
$-c > d$ (+)

69) $19 > 18$
$-5 < -4$ (−)

70) $9 > 8$
$-4 > -5$ (+)

71) $a = a$
$-b = -b$ (+)

72) $a > 7$
$-4 = -4$ (−)

73) $a > b$
$-c < -d$ (−)

74) $x < 18$
$a < b$ (+)

75) $a < b$
$-c > -d$ (−)

76) $x < y$
$x > -4$ (−)

77) $-5 < x - 5$
$+5 = +5$ (+)

78) Što izlazi, ako se od jednadžbe $0 = 0$ suptrahira nejednadžba $7 > 5$?

79) Izrazi nejednadžbom, a) da je x pozitivan broj, b) da je x negativan broj.

80) Što hoćemo da rečemo nejednadžbom: a) $-7 < x < +7$? b) $-7 \leqq x \leqq +7$?

Riješi **najkraćim** načinom ove jednadžbe:

81) $-(x + 18) + 37 = -16$.

82) $-15 + (34 - x) - 18 = -15$.

83) $-300 = 16 + (x - 23)$.

84) $-x = 4 - 8a + b - c - 4g$.

85) $-13a = a - (x - 3b)$.

86) $25b = -(x + a) - 7b + 4a$.

87) $17 - (16 - x) = 1$.

88) $-(x + 18) = 19$.

89) $-100 = 20 + (x - 25)$.

Treći odsječak.

Računske operacije drugoga stupnja.

§. 7. Pojam i zakoni multiplikacije.

Definicija: $\overset{1)}{a}+\overset{2)}{a}+\overset{3)}{a}+\ldots+\overset{m)}{a}=a\,.\,m$

$(3\,k)\,.\,4=3\,k+3\,k+3\,k+3\,k=(3\,.\,4)\,k=12\,k$

Zakoni distribucije:

I. $am+ap=a\,(m+p)$.
II. $am-ap=a\,(m-p)$, gdje je $m>p$.
III. $bm+cm=(b+c)\,m$.
IV. $bm-cm=(b-c)\,m$.

Zakon komutacije: V. $a\,.\,b=b\,.\,a$.

Zakon asociacije: VI. $a\,(b\,.\,c)=a\,.\,b\,.\,c$.

§. 7. A.

1) Multipliciraj 1000 vojnika sa 6 i reci rezultat točno.

2) Imaju li smisla ovi podaci: a) 5 puta 60 kuća? b) 57 puta $1m$? c) 38 sekunda puta 4 sekunde? d) 9 litara (l) puta $4l$? e) 94 puta 10.000 opeka? f) 2 knjige puta 3 učenika?

3) Netko zasluži na godinu a kruna; što zasluži za n godina?

4) Što se piše u kratko za sumu od a članova, kojih je svaki $b+c$ stabala?

5) Odio je vojnika postavljen u pravokutnik tako, da je u dužoj stranici po 25 vojnika, a u kraćoj po 4 vojnika. a) Koliko je vojnika u tom odjelu, b) Jesi li kod izračunavanja 25 vojnika multiplicirao s 4 vojnika?

6) Zvuk prevali u svakoj sekundi 333 m. Kako je daleko od moga uha top, kojemu čujem prasak t minuta poslije toga, što je ispaljen?

7) Produkt $6a$ napiši kao sumu. U koliko se to ne slaže posvema s definicijom multiplikacije?

8) Izvedi naznačene multiplikacije:

$\alpha)\ a=b$ / $x=4$ (.) $\beta)\ m=p$ / $10=10$ (.) $\gamma)\ x=12$ / $5=b+c$ (.)

§. 7. B.

Pretvori izraze, što dolaze, u produkte:

9) $10a+4a$. **10)** $5a+195b$. **11)** $180m-81m$.
12) $ab+a'b$. **13)** $pq+rq$. **14)** $cd-fd$.
15) $ab+ac$. **16)** $a\,.\,4+a\,.\,10$. **17)** $a\,.\,10-a\,.\,4$.
18) $7a+8a$. **19)** $73m-13m$. **20)** $139\,.\,94+139\,.\,6$.

Razriješi zagrade u izrazima:

21) $(10+4)a$. **22)** $(a+b)c$. **23)** $(a-b)c$.
24) $(3+v)u$. **25)** $u(3+v)$. **26)** $4(a-b)$.
27) $a(b+c)$. **28)** $p(q-r)$. **29)** $(q-r)p$.
30) $a(b+c+d)$. **31)** $a(b-c+d)$. **32)** $(b+c+d)v$.
33) $3(a-b-c-d+e)$. **34)** $a(p-q+r+s-t)$.
35) $(4+a-b+c+d)\,.\,5$. **36)** $16(a+25-b-c)$.
37) a) $9(\frac{7}{3}+4)$; b) $12(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4})$; c) $24(\frac{1}{1}\frac{1}{2}-\frac{7}{8}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4})$.
38) a) $6(3a+4b)$; b) $x(5y+6z)$; c) $11m(22n+33p)$.
39) a) $7(8p+9q+10r)$; b) $a(11b+12c+13d)$.
c) $14x(15x+16y+17z)$.
40) a) $(15a-16b+17c)\,14$. b) $(18y+19z-20u)\,x$:
c) $(5b-7c-9d)\,3a$.
41) a) $21(22p-23q+24s-25t)$; b) $(9a+17b-14c-3)\,.\,a$;
c) $3d(6e-9f-12g+15h)$.
42) a) $(3\frac{1}{3}x-6\frac{1}{6}y-9\frac{1}{9}-2\frac{1}{2}z)\,18$;
b) $16b(-0{\cdot}375a+1{\cdot}875b+3{\cdot}125c)$;
c) $(16\frac{1}{1}\frac{7}{5}l-10\frac{1}{1}\frac{1}{2}f-7\frac{8}{9}g+9{\cdot}75h)\,36d$
43) a) $3\frac{1}{3}(\frac{3}{5}x-\frac{9}{2}y+\frac{3}{1}\frac{}{0}z)$; b) $2\frac{2}{9}a\,(1{\cdot}8a-2{\cdot}7b+3\,6c+5\,4d)$.

Pretvori svaki od izraza, što dolaze, u algebraičku sumu **bez zagrada** i ujednostruči tu sumu što više:

44) $4(3a+2b-c)+3(a-c)$. **45)** $(a-b+15c)-2(a-c)$.
46) $5(4x+3y-z)+6(7x+3y-z)-3(4x-y+2z)$.
47) $18(2x-3y+z+4u)-7(x-y-z)+8(y+z)$.
48) $64(a+a'-a''+3b)-20(a+b+b'+4b'')-3(a'-a'')$.
49) $5[3(a+4b)]-7a+7(b-c)+14(2a-3b+c)$.
50) $4x+(3y+z)-2(2x-y+z)-5(x-4y-4z)$.
51) $4a-14b+3[7(a-b)-2(a-2b)]+8(a-b)-a$.
52) $13v-13u+4(v+u-7r)-3\,.\,4\,(5v-u-r)$.
53) $2\,.\,3\,.\,p+4\,.\,5\,.\,q-7(3p-3q+4r)-5\;6\,(q+r)$
54) $13a-3b-5a-(b\,.\,7+a\,.\,9)-4\,.\,3\,.\,a\,.\,5+7\,.\,b\,.\,6$.
55) $4(p+q)\,.\,5\,.\,6\,.\,7-201(p+q)+3\,.\,p\,.\,18-(q+2p)\,.\,30$.

56) Kako ćeš najzgodnije multipticirati 5.8.9 sa 2.125.4?

57) Izračunaj: *a*) 6.97 s pomoću zakona distribucije ovako: $6.97 = 6(100 - 3) = 6.100 - 6.3$. Sličnim načinom izračunaj: b) 13.994, c) 19.103, d) 6978 puta 11.

58) Za koliko ćeš pogriješiti ako $103 - 3.4$ tako računaš, da ga izjednačiš sa $(103 - 3).4 = 100.4$?

59) Zna se, da je $125.8 = 1000$. Kako se najbrže izračuna: a) 126.8, b) 127.8, c) 130.8, d) 225.8, e) 124.8, f) 123.8, g) 125.7, h) 125.11.

Izluči zajednički faktor i ujednostruči što više:

60) $6a - 6b + 6c$. **61)** $15a + 5b - 5$. **62)** $px - py + p$.

63) $4a.(5b) - 7c.(5b) + d.(5b)$.

64) $a(b - c) + a(c - d) + a(d - e) + a(e + f) - a(f - b)$.

65) $ar - br + cr - 4r + pqr - (b + c)r + 16r$.

66) $(3a - b)(p - q) + (4a - 7b)(p - q) + (8b + a)(p - q)$.

67) $(2x - y)(3m + n) - (4m - n)(2x - y) + m(2x - y)$.

68) $14.31 + 7.31 - 5.31 + 16.31 + 74.31 - 6.31$.

69) $(4a - b - 95)(c + 2d - e) + (c + 2d - e)(100 - a - 31b)$.

70) a) $3a(4x + 5y) + 6b(4x + 5y)$;

b) $3\frac{3}{4}x(4\frac{4}{5}a - 5\frac{5}{6}b) - 6\frac{6}{7}y(4\frac{4}{5}a - 5\frac{5}{6}b)$;

71) a) $(a + b)(p + q) + (c + d)(p + q)$;

b) $(x + y)(m - n) - (x - y)(m - n)$;

c) $(9x - 10y)(11u - 12v) - (13x - 14y)(11u - 12v)$.

72) a) $(7\frac{7}{8}a - 8\frac{8}{9}b)(9\frac{9}{10}x - 10\frac{1}{12}y) + (2\frac{1}{8}a - 1\frac{1}{9}b)(9\frac{9}{10}x - 10\frac{1}{12}y)$;

b) $(1{\cdot}23p + 2{\cdot}34q)(3{\cdot}45r + 4{\cdot}56s) + (3{\cdot}77p - 2{\cdot}66q)(3{\cdot}45r + 4{\cdot}56s)$.

c) $(9{\cdot}75ab - 3\frac{3}{5}cd)(10\frac{1}{1}\frac{1}{2}ef - 12\frac{1}{1}\frac{2}{3}gh) - (10\frac{1}{1}\frac{1}{2}ef - 12\frac{1}{1}\frac{2}{3}gh)(8\frac{3}{4}ab - 2{\cdot}6cd)$.

U izrazima, što dolaze nemaju **svi** produkti zajedničkoga faktora, ali je on u više njih; izluči ga iz njih:

73) $5m + 8p - 8q$. **74)** $63m + 31p - 63q$. **75)** $a + bc + bd$.

76) $A - mB - mC + mD$. **77)** $A + B - 16C + 16D - 32E$.

78) $49a - 71b + 49c + 71d - 49e + 49f - 71g$.

79) $a + 3b + 5c - 5d + 5e - 13f - 13g - 13h$.

80) $4a - b + 19c - 19d - 19 + 18e + 18f + 18$.

81) $ab + ac + ef - ag + eh - ek + ap - aq$.

82) $p + 3a - q + 3b + v - 31c - 3d + 31e$.

83) $a + (b - c)d + (b - c)e$. **83a)** $a - (b - c)d + (b - c)e$.

84) $v - (2a + 3b)(m - n) + (4a - b)(m - n) - (a + b)(m - n)$.

85) $(2a + 3b)(4m - n) + (4m - n)(a - b) + 3ma + 2mb$.

---

§. 7. C.

Izračunaj:

86) $0.8 - 7$. **87)** $9.0 + 50$. **88)** $(a - a).5$. **89)** $(a - a).(b - b)$.

90) $(-3).5$. **91)** $[a - (a + 2)].9$. **92)** $6.(-7)$. **93)** $(-8).(-5)$.

94) $0.(-8)$. **95)** $(-19).(a - a)$. **96)** $3.0 - 5.(-6) + (-7).(-8)$.

97) $(-1).(-4) - (-5).(-6)$.

98) $(7 - 9).2 - (8 - 20).5 - 16(0 - 1)$.

99) $(-3).(-3).(-3)$. **100)** $(-1).(-1).(-1).(-1)$.

101) $1.2.3.0 - 4.0.5.6 - (-1).7$.

102) $(-3).[-5.2 + (-5).2 - (-5).(-2)]$.

103) $(-1896).(-1723).(b - b)$.

§. 7. D.

S pomoću općenoga pravila distribucije izvedi ove multiplikacije:

104) $(a + b)(r + s)$. **105)** $(a - b)(r + s)$. **106)** $(a - b)(r - s)$.

107) $(2a - 3b)(d + e)$. **108)** $(4a - c)(b + 2d)$.

109) $(2a - b)(c - 2d)$. **110)** $(4a + 7b)(3c - d)$.

111) $(4a - 16b)(7c + 16d)$. **112)** $(3a - b - c)(x + y)$.

113) $(4a + b - 3c)(2x - y)$. **114)** $(a + 5b - 6c)(2x + 3y)$.

115) $(14a - b + c)(3m + 4p)$. **116)** $(a - b - c)(x + y + z)$.

117) $(a + b - c)(x + y - z)$. **118)** $(4a + 7b - 1)(x + 3y)$

119) $(4a + 7b - 1)(x + 3y + 1)$.

120) $(a + b + c)(3x - 4y - z - u)$.

121) $(a - b + 2c)(2x - y - z + u)$.

122) $(a + b)(c - d) + (3a + 4b)(2c + d) + (2a - b)(7c + d)$.

123) $(4p + q)(3r - s) + (7p - q)(r + s) - (3p + q)(4r + 19s)$.

124) a) $(14 + \frac{7}{8})(26 + \frac{2}{7})$; b) $(1\frac{4}{5} + 3)(0{\cdot}125 + \frac{1}{1\,2})$.

125) a) $(2\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{3}y).(6x + 12y)$; b) $(4a - 8b)(2{\cdot}25a - 3{\cdot}75b)$.

126) a) $(4\frac{4}{5}a - 5\frac{5}{6}b - 6\frac{6}{7}c)(630a - 420b - 210c)$.

b) $(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b - \frac{3}{4}c)(2a - \frac{3}{2}b + \frac{4}{3}c)$;

c) $(\frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y + 20)(\frac{5}{4}x - 30 - 1\frac{1}{5}y)$;

d) $(0{\cdot}375p + 3\frac{1}{8}q + 0{\cdot}875r)(2\frac{2}{3}p - 0{\cdot}32q - 1\frac{1}{7}r)$.

---

§. 7. E. i F.

127) Izračunaj najkraćim načinom:

a) $4.(a.25).8.3$; b) $(125a).(8b).(2c).c$; c) $5.39.20$;

d) $(125a).(8b)$; e) $5.5.5.2.2.4$;
f) $5a.5p.5r.[(2s).(2t).(2u)]$.

---

§. 7. G.

I. $a^m = \overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \overset{3)}{a} + \ldots + \overset{m)}{a}$.

II. $a^m . a^n = a^{m+n}$.

128) Izračunaj: a) $4^2.5^3$, b) 4.2^3, c) 3^3+4^3, d) 4^3-3^3, e) $4.3^2.5^3$, f) $1.10^3+8.10^2+8.10+3.1$, g) $4+3.10+2.10^2+7.10^3+8.10^4+9.10^5+6.10^6+5.10^7$.

129) Kako se pišu kao potencije od 10: a) jedan milijun, b) jedna milijarda, c) jedan bilijun?

130) Što je baza, a što eksponent u potenciji: a) 7^3, b) 10^2, c) 2^{10}, d) a^4, e) $(a+b)^2$, f) $(a-b)^3$, g) $(abc)^4$?

Izvedi multiplikacije:

131) a) $7^3.7^5$; b) $10^4.10^6$; c) $312^{15}.312^{51}$.

132) a) $a^4.a^2$; b) $x^{12}.x^{24}$; c) $p^{139}.p^{861}$.

133) a) $a^p.a^q$; b) $x^m.x^n$; c) $c^d.c^e$.

134) a) $8^a.8^{b+c}$; b) $m^x.m^{y-z}$; c) $a^b.a^{11-b}$.

135) a) $q^{a+b}.q^{c-d}$, b) $a^{10-x}.a^{10+x}$, c) $m^{12+y}.m^{13-y}$.

136) a) $14^{15}.14^{16}; 14^{17}$; b) $p^{18}.p^{19}.p^{20}$; c) $a^x.a^y.a^z$.

137) a) $p^{a+b}.a^c.p^d$; b) $x^{a+b}.x^{a-b}.x^{2b}$; c) $a^{x+1}.a^{x-y}.a^{y-2x}$.

Izvedi multiplikacije i ujednostruči što više:

138) $(4p-q^2+r^4)\,3p^2$. **139)** $(a^4+b^3+1)\,4a^2b^3$.

140) $7p^2q(q+r+s^4)-3pq(4q^5-3p^2+p^3q)$.

141) $4a^2b^2(a^3+a^2b-b^3)-(a^3b-ab^4+b^5)\,2a^2b$

142) $15p^2q(3p^2+4pq+q^2)+27pq^2(4p^2-pq+q^2)$.

143) $(a+b)(a+b)$. **144)** $(a+b^2)(a^2+b)$. **145)** $(7a+b^2)(a-b)$.

146) $(a+b)^2$. **147)** $(a-b)^2$. **148)** $(a+b)(a-b)$.

149) $(a^2+b^2)^2$. **150)** $(a^2-b^2)^2$. **151)** $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.

152) a) $a^2(a^3+b^4)$; b) $x^5(3x^2-4y^2)$; c) $(4p^4-5q^5)\,25p^3$.

153) a) $(3x^2+4y^2-5z^2)xyz$; b) $(a^3b^2c-ab^2c^3+a^4b^3c^2)\,a^2b^2c^3$; c) $8p^2q^2r^2(125p^3q^4r^5+375p^2q^3r^4-625pq^2r^3)$.

154) a) $(a+b)^3$; b) $(a-b)^3$; c) $(x^2+y^2)^3$; d) $(5p-6q)^3$.

155) a) $(a^2+b^2+c^2)^2$; b) $(a^2-b^2-c^2)^2$; c) $(2x-3y^2+4z^3)^2$;

156) a) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$; b) $(m-n)(m^2+mn+n^2)$; c) $(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$.

Izluči zajednički faktor:

157) a) $x^3y^3z^4-x^4y^2z^3-x^3y^4z^2$; b) $10p^3q^2r+8pq^3r^2-12p^2qr^3$, c) $24a^2bcd-36ab^2cd+48abc^2d-60abcd^2$.

158) $a^4b+a^2b^3+ab^2$. **159)** $a^4b^9+a^5b^8+a^6b^7$.

160) $5a^4b+3a^2b^2+2ab^2$. **161)** $15a^4b+15a^2b^2+15ab^2$.

162) $25a^4b+15a^2b^2+5ab$. **163)** $35m^2n^4p^3+7mn^3p^2$.

164) $4a^4b+c^5d+c^4d^2+3c^3d^3-16c^6$.

165) $11c^2d^4+22c^2d^2+2(d^2+2)-5(d^2+2)c^2$.

166) $(4a^2b^2+16a^5b^2-3ab)+(4abc+16a^4bc-3c$.

167) $3a^4b^3c^3-15a^5b^8c^9+21a^3b^6c^7+27a^{10}b^8c^4$.

Razriješi zagrade i ujednostruči što više:

168) $(p^3-p^2q+pq^2-q^3)(p+q)$.

169) $(x^4-x^3+x^2-x+1)\,x+1)$.

170) $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$.

171) $15xy-(3x+y)(x-5y)+(7x-y)\,x$.

172) $4xyz-(xy+xz+yz)(x-y-z)$.

U izrazima, što dolaze, neka se substituira (umetne):

$\alpha)$ $A=4y$, $B=x+4y-3z$, $C=3x+5y-10z$;
$\beta)$ $A=x^2-y^2$, $B=x^2-z^2$, $C=y^2-z^2$:
$\gamma)$ $A=4xz-y^2$, $B=x^2-xy+5z^2$, $C=4xy-y^2-z^2$;

pa neka se onda što više ujednostruče:

173) $AB+AC+BC$. **174)** $AB-AC+B^2$. **175)** $A(B+C-A)$.

176) $A^2+B^2+C^2$. **177)** $AB-B^2-C^2$. **178)** $4AB+3AC-BC$.

S pomoću pravila transpozicije prvoga stupnja neka se riješe jednadžbe, što dolaze, i neka se izrazi, koji se pri tom pokazuju, što više ujednostruče:

179) $x-4a=7(a-b)$. **180)** $x-(a-b)=2(a+b)$.

181) $3(a+b)=4a+x$. **182)** $0=7(p-2q)-x+14q$.

183) $27(a-b+c)-(20c-x)=7c$.

184) $(p+q)^2=x^2-p^2-q^2$.

185) $(3a-b).4=19a-(3b-x)$. **186)** $3.4^2-(x-3^2)=47$.

187) $m+2n-3(2m-n)=x-4(5m-n)$.

188) $a(b-c+d)-b(a+c-d)=4ab-(bc+ad-x)$.

189) $(-3)^2+4.(-7a)=9-28(a+1)+(-4-x)$.

§. 8. Pojam i zakoni divizije.

I. $(a:b).b=a$.
II. $(a.b):b=a$.
III. $(+a):(+b)=+(a:b)$; $(+a):(-b)=-(a:b)$;
$(-a):(+b)=-(a:b)$; $(-a):(-b)=+(a:b)$.
IV. $0:m=0$; $0:0=\frac{0}{0}$ je neizvjesno.
V. $a^m:a^n=a^{m-n}$, ako je $m>n$.
VI. Iz $x.b=a$ izlazi $x=a:b=\frac{a}{b}$.

§. 8. A. B.

1) Koji broj daje: a) multipliciran sa 17 broj 68? b) sa 4 multipliciran 68? c) s 14 multipliciran a? d) s m multipliciran a?

2) Što daje: a) 18 kg : 3 kg? b) 18 kg : 3? c) 18 : 3? d) Ima li smisla zadaća 18 : 2 kg? e) Ima li smisla (18 : 2) kg?

3) Zašto ima kvocijent 1 k : 25 fil. ipak smisla, makar da su imena različita?

§. 8. E.

U divizijama, što dolaze, reci rezultat i multiplikaciju, koja taj rezultat potvrđuje:

4) 40 konja : 10. **5)** 80 volta : 8 volta. **6)** 57 kr : 19 kr.

7) 420 l : 7. **8)** 420 kr : 7 fil. **9)** 7200 sati : 24 sata.

10) $4a:a$. **11)** $4a:4$. **12)** $7(b+c):(b+c)$. **13)** $4ab:b$.

14) $\frac{3(b+c)}{b+c}$. **15)** $\frac{3.4.5.6.7.8}{5.6.7.8}$. **16)** $\frac{4798.17}{17}$. **17)** $\frac{1820}{13}\cdot 13$.

18) $\frac{1820}{13}\cdot(13.10)$. **19)** $\frac{b+c+d}{a}\cdot a$. **20)** $\frac{15m^2n^2}{x^2y}\cdot x^2y$.

Primjenom formula I. i II. i formula iz predašnjih paragrafa ujednostruči ove izraze:

21) $\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right).d$. **22)** $a+\frac{a+b}{y}\cdot y+\frac{c+d}{z}\cdot z$.

23) $[a+(b-c)].d:(a+b-c)$. **24)** $\left(a+\frac{b}{c}\right)c$.

25) $\left(a+\frac{b}{c}+\frac{d}{c^2}\right)\cdot c^2$. **26)** $a(bc)d:(cd)$.

27) $\left(\frac{3a+b}{c}-\frac{5a-b}{c}+\frac{11a+9b}{c}\right).c$. **28)** $\left(m+\frac{a}{p}\right)\left(p+\frac{a}{m}\right)$.

29) $x-\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}\right)\cdot z$. **30)** $ab+ac+\left(\frac{3ac-4ab+bc}{q}\right)\cdot q$.

---

§. 8. D.

Izračunaj:

31) $\frac{0}{7}-\frac{0}{11}+\frac{13}{13}$. **32)** $\frac{(4-4).5}{57}-\frac{3.18}{3}$.

33) $\frac{-27}{9}+\frac{27}{-9}+\frac{-36}{-6}-\frac{-18}{3}+\frac{100}{-20}$.

34) $\frac{(-5).21}{5}+\frac{27:9}{-3}-\frac{3.2^2}{-4}+\frac{3.(-2)^2}{-4}+\frac{0.5^2}{49}$.

35) $\frac{(-8)(-9)}{(-6)(-3)}-\frac{(-9)(-10)(-12)}{(-15).(+4)}-\frac{(-20)(+18)}{-(2.3+4)(-9)}$.

36) $(-4)^2:(-2)^4+\frac{-3.5.7.9}{(-21).3}$.

37) Što će biti od: a) $\frac{(4x-8).5}{4x-8}$ za $x=2$?

b) $\frac{20x-40}{4x-8}$ za $x=2$?

38) Izračunaj za $x=8$ izraz:

$$x+4+\frac{x-19}{11}-(33-5x)+\frac{2-3x}{-2}.$$

---

§. 8. F.

39) a) $x^{11}:x^7$; b) $x^7:x^3$; c) $\frac{x^{11}+x^7}{x^5}$. d) $\frac{a^8-a^7}{a^5}$.

40) a) $x^4.x.x^8:(x^3.x^{10})$; b) $p^4.p^3.p^2:(p^5.p)$. c) $a^3b^4c^{20}:a^3b^4c^{19}$.

41) a) $(a^7b^8c^9+a^6b^7c^8-3a^5b^6c^7):a^5b^6c^7$;
b) $(a^9-a^8+3a^7-5a^6):a^4$.

---

§. 8. G.

S pomoću pravila transpozicije drugoga stupnja riješi ove jednadžbe:

42) a) $\frac{x}{16}=5$; b) $\frac{x}{a}=b$; c) $f=\frac{x}{3a+4b}$; d) $x:(b+c)=e$.

43) a) $4x=64$; b) $1400=35x$; c) $20x=160a$; d) $a=(b+c)x$.

44) a) $27:x=9$; b) $999:x=27$; c) $f:x=g$; d) $\frac{81}{x}=27$.

e) $\frac{333}{x}=9$; f) $20=\frac{400}{x}$; h) $\frac{a+bc}{x}=e$;

k) $(7a^2-3b^2):x=4d$. l) $a+b=c:x$.

---

§. 4. G. i §. 8. G.

Primjenom pravilâ transpozicije prvoga i drugoga stupnja riješi ove jednadžbe:

45) $4x-9=31$. **46)** $29=6x-31$. **47)** $25x+71=196$.

48) $2400=1401+27x$. **49)** $(4+3x)5=35$. **50)** $ax-b=c$.

51) $4x+13=8a+b$. **52)** $24-4x=8$. **53)** $31-2x=1$.

54) $23=723-14x$. **55)** $29x-6.15=200$. **56)** $\frac{4+x}{31}=32$.

57) $4(x-2)=49$. **58)** $\frac{25-x}{3}=2$. **59)** $\frac{24+7x}{15}=3$.

60) $390=1500-10x$. **61)** $\frac{9(2x+5)}{7}+4=13$.

62) $\frac{4(29-2x)}{5}=6+2.7$. **63)** $(ax+b)\,c=4bc$.

64) $(13-x)5+7=32$. **65)** $\left(\frac{x}{8}+\frac{32}{8}\right)\cdot 8=32$.

66) $\left(100-\frac{5}{x}\right)\cdot 5=20^2$. **67)** $-4x=-28$.

68) $-4x=28-(-4)$. **69)** $2a-3b=6x-4a-9b$.

70) $\left(\frac{6}{x}+3\right)5-15=(-3)(-5)$. **71)** $3(0.7-5x)=-2^2.3.5$.

72) $(3-3)(4a+b)=\frac{-x}{7}+5$.

§. 9. Pravila za drugi stupanj.

A. Zakoni samo za drugi stupanj.

I. $a.(b.c)=a.bc$, (Zak. asoc. za mult. §. 7. VI.)
II. $a.(b:c)=a.b:c$,
III. $a:(b.c)=a:b:c$,
IV. $a:(b:c)=a:b.c$,
V. $a:b=(a.q):(b.q)$,
VI. $a:b=(a:q):(b:q)$.

§. 9. C.

Izračunaj izraze, što dolaze, na dva načina: a) **prije** primjene formula I.—VI., b) poslije primjene tih formula:

1) a) $30.(32:16)$; b) $32:(16:2)$. c) $32:(16.2)$.

2) a) $(24+8):4$; b) $(24-8):4$; c) $\frac{9.11}{3.11}$.

3) a) $(64+128-16-8+32):8$;
b) $(64+128-16-8+32):(-8)$.

4) a) $2048:(512:4:2)$; b) $3125.8:(5.2)$.

5) a) $(576.5^2):[100:(12:3)]$; b) $(4.3^2+81-6.6):9$.

Izračunaj izraze, što dolaze, a) onako, kako stoje, b) po pravilu za izračunavanje agregata drugoga stupnja (Pravilo četvrto §. 9; C.) i odredi divizijom dobivenih brojeva vrijednost kvocijenta:

6) a) $3.4.5.6:10:9$; b) $\frac{3.9.24}{54}\cdot(7.3)$: c) $\frac{1001}{11}:\frac{26}{2}:\frac{21}{3}$.

7) a) $\frac{52.51.50}{1.2.4.5.3}\cdot\frac{49.48}{6.7}$; b) $323.9.999:51:57:37$.

8) $2^3.5^3.7^2:20:(245:7).(81:3):(135:5)$.

9) $(-1)(-2)(-3)(-4):[8:(-1)].[-100:(25:5)]$.

Izračunaj ponovnim kraćenjem, dok ne izađe divizor 1, kvocijente (§. 9. A. 4. poučak).

10) a) $\frac{52.51.50.49.48}{1.2.3.4.5.6.7}$; b) $\frac{3424\ 63}{107.48.7}$; c) $\frac{1048576.9}{9216.128}$.

11) a) $\frac{(-32).31.30.29}{24.(-116)}$; b) $\frac{6.36.216\ 1296.153.333.16}{4.8.16.81.34.148}$.

S pomoću zakona drugoga stupnja neka se pretvore u što jednostavnije kvocijente izrazi:

12) $\alpha)\ \frac{(13m).n}{p.q}\cdot q$; $\beta)\ \frac{3ab}{4cd}\cdot 2.c$; $\gamma)\ \frac{15pq}{7abc}\cdot(7ac)$.

13) $\alpha)\ \frac{4m}{a}\cdot 9.p$; $\beta)\ \frac{13a^2b^2c^2}{d^2e^2}\cdot d^2$; $\gamma)\ \frac{4ab^4}{3e}\cdot c^4$.

14) $\alpha)\ r.s.\frac{4p}{rsq}$; $\beta)\ \frac{5a^4b}{26p^2q}\cdot(13pq)$; $\gamma)\ \frac{4pq}{(5m).(25m^2)}\cdot 5m$.

15) $\alpha)\ 128abcd:(4ab):(4cd)$; $\beta)\ 128a^7b^3:(4a^2b):(4a^2b)$.

16) $\alpha)\ \frac{24(a-b)}{11(c-d)}\cdot\frac{22(c-d)}{13(e-f)}\cdot\frac{26(e-f)}{48(a-b)}$; $\beta)\ \frac{a^{11}b^{13}c^{15}}{d^5e^7f^9}\cdot\frac{d^8e^9f^{10}}{a^{10}b^{11}c^{12}}$.

17) $\alpha)\ \frac{a+b}{e+f}\cdot\frac{g(e+f)}{a+b}$; $\beta)\ \frac{4a(b+c-d)}{3(e+f)}\cdot\frac{(e+f)^2}{b+c-d}$.

Upotrijebi formule $a:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}$ i $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ na izraze:

18) α) $m : \frac{p}{q+2}$; β) $abcd : \frac{ab}{ef}$; γ) $10a^2b^2 : \frac{2ab}{ef}$.

19) α) $3a^3b : (5cd : ef)$; β) $24a^5b : (30a^4 : b^3c) : a^2$.

20) α) $\frac{27pq}{3mn} : \frac{3pq}{4m}$; β) $\frac{14a^4b^4c^4}{39d^5e^5} : (7a^2b^2 : 2d^2e^2)$; γ) $\frac{p^3q^4}{3ab} : \frac{e^3f^3}{3}$.

Krati kvocijente, što dolaze, i pazi pri tom, da će se dividendu i divizoru zajednički faktor često tek pokazati izlučivanjem zajedničkoga faktora:

21) a) $\frac{12a}{4c}$; b) $\frac{ab}{ac}$; c) $\frac{abcd}{abe}$; d) $\frac{3a^4bcd}{a^4c}$.

22) a) $\frac{12a^2}{18ab}$; b) $\frac{16x^3y^4}{28x^4y^3}$; c) $\frac{36p^2q^3r^4}{64p^4q^3r^2}$.

23) a) $\frac{9(a+b)}{15(a-b)}$; b) $\frac{10(x^2-y^2)}{11(x^2-y^2)}$; c) $\frac{5\frac{1}{2}a^2b(p^3+q^4)}{2\frac{3}{4}ab^2(p^4+q^3)}$.

24) a) $\frac{3x+3y}{3x-3y}$; b) $\frac{9a^2b+12ab^2}{6a^3b-15ab^3}$; c) $\frac{16x^2y^3z^2-32x^3y^2z^3}{24x^3y^2z^2+40x^2y^3z^2}$.

25) a) $\frac{8p+8q}{9p+9q}$; b) $\frac{x^2y-xy^2}{9x-9y}$; c) $\frac{a^2b^3c^4+ab^2c^3}{a^3b^4c^5+a^4b^5c^6}$.

26) a) $\frac{12a+18b-27c}{9a-15b+21c}$; b) $\frac{x^2yz^2-x^3y^2z^3+x^4y^3z^4}{xy^2z+x^2y^3z^2-x^3y^4z^3}$;

c) $\frac{28ab^2c^3-42a^3bc^2+56a^2b^3c}{21ab^3c^2+35a^3b^2c-49a^2bc^3}$.

27) a) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$; b) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$; c) $\frac{49x^2-64y^2}{(7x-8y)^2}$;

28) a) $\frac{15(a+b)-x(a+b)}{7(15-x)+y(15-x)}$; b) $\frac{x(7y-8z)+8(7y-8z)}{7y(x+8)-8z(x+8)}$.

c) $\frac{19ab^2(21e^5f^6+22g^7h^8)-20c^3d^4(21e^5f^6+22g^7h^8)}{21e^5f^6(19ab^2-20c^3d^4)+22g^7h^8(19ab^2-20c^3d^4)}$.

29) a) $\frac{(a^2+ab)(x^2y-xy^2)}{(x^2-y^2)(a^2-b^2)}$;

b) $\frac{(1\frac{4}{5}x^3y^2z-3\frac{3}{5}xy^2z^3)(3\frac{3}{7}a^4b^4c^4+10\frac{2}{7}a^3b^3c^3)}{(20\frac{4}{7}abc+6\frac{5}{7}a^2b^2c^2)(5\frac{2}{5}x^2y^3z^2-10\frac{4}{5}y^3z^4)}$.

c) $\frac{(3abc+4bcd-5cde)(36p^2-25q^2)}{(6p+5q)^2(6abc^2-10c^2de+8bc^2d)}$.

B. Zakoni za prvi i drugi stupanj.

VII. $(a+b).m = am+bm$
VIII. $(a-b).m = am-bm$ (Zak. distr. za mult. §. 7. III. i IV.)
IX. $(a+b):m = a:m+b:m$
X. $(a-b):m = a:m-b:m$
XI. $\frac{D}{T} = Q + \frac{D-QT}{T}$.

§. 9. D. i E.

Izvedi naznačene divizije i ujednostruči što više:

30) a) $(8x+8y):8$; b) $(ab-ac):a$; c) $(p^2q^3r^4+p^4q^3r^2):p^2q^2r^2$.

31) a) $(9a^2+18ab+9b^2):9$; b) $(x^3y-x^2y^2+xy^3):xy$;
c) $(36a^2c-24abc+12b^2c):12c$.

32) a) $\frac{15x-20y}{-5}$; b) $\frac{-x^2y+xy^2}{-xy}$; c) $\frac{3m^4n^5-6m^7n^8}{-3m^4n^5}$.

33) a) $\frac{1\frac{3}{7}a^2b^3c-2\frac{1}{7}ab^2c^3}{-\frac{5}{7}ab^2c}$; b) $\frac{6\cdot78p^3q^4-79\cdot1p^4q^3}{-1\cdot13p^3q^3}$;

c) $\frac{2\frac{2}{5}\frac{3}{0}x^3y^4z^3-4\frac{4}{5}\frac{6}{0}x^4y^3z^4}{-1\cdot23x^3y^3z^3}$.

34) a) $\frac{-12cdef-20defg-16efgh}{-4ef}$;

b) $\frac{2\frac{1}{8}ab^2c^3-4\frac{1}{4}b^4c^5d^6+8\frac{1}{2}c^7d^8e^9}{-2\cdot125c^3}$;

c) $(123\frac{2}{5}q^2q^3r^2-246\frac{4}{5}p^3q^2r^2-37\frac{1}{5}\frac{1}{0}p^2q^2r^3):(-12\cdot34p^2q^2r^2)$.

U primjerima, što dolaze, upotrijebi formule IX. i X. čitane **natrag** t. j. adiraj i suptrahiraj kvocijente jednakih divizora:

35) a) $\frac{x}{10}+\frac{y}{10}$; b) $\frac{a}{15}-\frac{b}{15}$; c) $\frac{a^2}{100}-\frac{b^2}{100}$.

36) a) $\frac{p}{q}+\frac{r}{q}$; b) $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$; c) $\frac{d^2}{e^3}-\frac{f^4}{e^3}$.

37) a) $\frac{a^2b}{c^2}+\frac{de^2}{c^2}$; b) $\frac{xy^2z^3}{p^4}-\frac{u^3v^2t^2}{p^4}$; c) $\frac{13\frac{1}{3}a^2}{b^2}-\frac{2\frac{1}{3}a^2}{b^2}$.

38) a) $\frac{7\frac{3}{5}x}{4\frac{1}{5}}-\frac{3\frac{2}{5}x}{4\frac{1}{5}}$; b) $\frac{3\frac{1}{7}pq}{8\frac{4}{7}}+\frac{5\frac{3}{7}pq}{8\frac{4}{7}}$; c) $\frac{3\cdot456abc}{2\frac{1}{8}}-\frac{1\cdot331abc}{2\frac{1}{8}}$.

39) a) $\frac{33}{11}+\frac{44}{11}-\frac{22}{11}$; b) $\frac{12}{x^2}-\frac{19}{x^2}+\frac{8}{x^2}$; c) $\frac{a^2}{21}-\frac{2ab}{21}+\frac{b^2}{21}$;

d) $\frac{x^4}{z^3}+\frac{2x^2y^2}{z^3}+\frac{y^4}{z^3}$.

40) a) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$; b) $\frac{p+q}{r}-\frac{p-q}{r}$; c) $\frac{3x-7y}{4}+\frac{x+7y}{4}$;

d) $\frac{4a^2-7b^2}{3}+\frac{10b^2-4a^2}{3}$.

41) a) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}$; b) $\frac{a^2-2ab+b^2}{2b}-\frac{a^2-b^2}{2b}$;

c) $\frac{p^6+2p^3q^4+q^8}{2p^3}+\frac{(p^3+q^4)(p^3-q^4)}{2p^3}$.

42) a) $\frac{p}{p+q}+\frac{q}{p+q}$; b) $\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{b}{a^2-b^2}$; c) $\frac{9x^2}{3x-2y}-\frac{4y^2}{3x-2y}$.

43) a) $\frac{8x-9y}{a+b}-\frac{9y+8x}{a+b}$; b) $\frac{9\frac{5}{7}a+5\frac{7}{9}b}{10a-10b}+\frac{\frac{2}{7}a-15\frac{7}{9}b}{10a-10b}$;

c) $\frac{2{\cdot}222p^2-3{\cdot}333q^2}{2\frac{3}{8}p^2-3\frac{1}{40}q^2}-\frac{0{\cdot}092q^2-0{\cdot}153p^2}{2\frac{3}{8}p^2-3\frac{1}{40}q^2}$.

44) a) $\frac{(a+b)^3}{2b(3a^2+b^2)}-\frac{(a-b)^3}{2b(3a^2+b^2)}$;

b) $\frac{(x^2-y^2)^3}{2x^2(x^4+3y^6)}+\frac{(x^2+y^3)^3}{2x^2(x^4+3y^6)}$;

c) $\frac{(a+b)^4}{8ab(a^2+b^2)}-\frac{(a-b)^4}{8ab(a^2+b^2)}$.

---

45) Svedi raširivanjem: a) kvocijent $\frac{20}{4}$ na divizor 28, b) kvocijent $\frac{119}{17}$ na divizor 51, c) kvocijent $\frac{160}{8}$ na divizor 160; d) kvocijent $\frac{e}{f}$ na divizor $9f$, g) kvocijent $\frac{6a}{5b}$ na divizor $25bc$, h) kvocijent $\frac{3(b+c)-a}{7ab+1}$ na divizor $14ab+2$.

46) Svaki se broj i izraz, koji nema oblik kvocijenta može uzeti za kvocijent, kojemu je dividend onaj broj ili izraz, a divizor broj 1. Prema tomu dovedi: a) broj 4 na divizor 12, b) $a.b$ na divizor c, c) $p+q$ na divizor 5 m.

Dovedi najprije raširivanjem (formula VI.) na kvocijente jednakih divizora, pa onda tek adiraj i suptrahiraj izraze:

47) a) $2+\frac{a^2+b^2}{ab}$; b) $\frac{x^4+y^4}{2x^2y^2}-1$; c) $a-2b+\frac{b^2}{a}$;

d) $\frac{x^6}{y^4}+2x^3+y^4$.

48) a) $\frac{a^3}{b}+3a^2+b(3a+b)$; b) $x^6-3y^2(x^3-y^2)-\frac{y^6}{x^3}$;

c) $a^2+\frac{3ab^2+b^3}{a+3b}$; d) $\frac{p^2(p-3q)}{3p-q}+q^2$;

e) $\frac{m^3}{m-n}-m^2-mn-n^2-\frac{n^3}{m-n}$;

f) $\frac{a^3}{a+b}-a^2+ab-b^2+\frac{b^3}{a+b}$.

49) a) $\frac{p}{q}+\frac{s}{t}$; b) $\frac{p}{q}-\frac{s}{t}$; c) $\frac{a}{pq}-\frac{b}{qr}$; d) $\frac{3cd}{ab}+\frac{c}{a}$;

e) $\frac{abc}{x^2y}-\frac{ab}{xy}$.

50) a) $\frac{a}{a-b}-\frac{c}{b}$; b) $\frac{p}{q}-\frac{p+q}{p-q}$; c) $\frac{a}{pq}-\frac{b}{pr}+\frac{c}{qr}$.

51) a) $\frac{a+b}{4}+\frac{a-b}{2}$; b) $\frac{3a+b-c}{3}-\frac{4a-b+c}{6}$.

52) $\frac{7p+3q-11r}{5}+\frac{5p-q+10r}{3}-\frac{3p-q+9r}{15}$.

53) $\frac{7m}{6}-\frac{3p}{14}+\frac{4m-p}{7}+\frac{4p}{21}-\frac{9p-m}{4}$.

54) $\frac{4a+b-c}{2}-\frac{a-b+c}{4}+\frac{7a+3b+5c}{8}-\frac{a-2b+c}{16}$.

55) a) $\frac{(p-q)^2}{4pq}+1-\frac{(p+q)^2}{4pq}$;

b) $\frac{4p^7}{p^2q^3r^2}-\frac{8p^5q^2}{pq^4r^2}+\frac{q^7}{p^3q^3r}-\frac{3p^4q^3}{p^2q^2r^3}$.

56) $\frac{4a}{b}+\frac{7a^2-b^2}{ab}+\frac{3ab-7a^2c+b^2c}{abc}$.

57) $\frac{x^2-x-1}{x-1}-\frac{3x^2-5x+7}{x+1}+\frac{2x^3-5x^2+x-1}{(x-1)(x+1)}$.

58) $\frac{a^2+b^2}{a-b}+\frac{4a^2-ab+b^2}{2a-3b}+\frac{3ab-a^2-2b^2}{a-b}$.

---

*

§. 9. E.

Postupak za diviziju polinoma na polinom (formula XI.) neka se primijeni na ove primjere:

59) a) $(ax+bx):(a+b)$; b) $(p^2q^3-q^3r^4):(p^2-r^4)$;
c) $(56x^2-64xy):(7x-8y)$.

60) a) $(pq-q^2+pr-qr):(p-q)$;
b) $(8ac-12bc+10ad-15bd):(4c+5d)$;
c) $(90ab-108bcd-5ax+6cdx):(5a-6cd)$.

61) a) $(x^2+2xy+y^2):(x+y)$;
b) $(9a^2-24ab+16b^2):(3a-4b)$;
c) $(25m^4+60m^2n^3+36n^6):(5m^2+6n^3)$.

62) a) $(a^2-b^2):(a-b)$; b) $(49p^2-64q^2):(7p+8q)$;
c) $(8{\cdot}1x^6-12{\cdot}1y^8):(9x^3-11y^4)$.

63) a) $(63x^2+2xy-80y^2):(7x+8y)$;
b) $(143a^2b^2+2ab^2c-168b^2c^2):(13ab-14bc)$;
c) $(255m^2n^2o^2+2mn^2o^2p-288n^2o^2p^2):(17mno-18nop)$.

64) a) $(4ac-4\frac{2}{3}ad+4\frac{4}{5}bc-5\frac{3}{5}bd):(6c-7d)$;
b) $(5\frac{1}{4}xz-6ux-5\frac{5}{6}yz+6\frac{2}{3}uy):(7z-8u)$;
c) $(6{\cdot}4m^2-14\frac{2}{3\,5}mn+7\frac{5}{7}n^2):(8m-9n)$.

65) a) $(2x^2+2\frac{2}{3}xy-2\frac{1}{2}xz-3\frac{1}{3}yz):(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y)$;
b) $(4{\cdot}5ac-5{\cdot}25ad-4{\cdot}8bc+5{\cdot}6bd):(0{\cdot}75a-0{\cdot}8b)$;
c) $(6\frac{2}{3}p^2+14\frac{5}{1\,4}pq+7\frac{5}{7}q^2):(\frac{5}{6}p+\frac{6}{7}q)$.

66) a) $(x^2+xz-y^2-yz):(x-y)$;
b) $(10pq-12pr+15q^2-38qr+24r^2):(5q-6r)$;
c) $(0{\cdot}4ad-0{\cdot}5ae+0{\cdot}8bd-be+1{\cdot}2cd-1{\cdot}5ce):(0{\cdot}4d-0{\cdot}5e)$.

67) a) $(a^2+ac-b^2-bc):(a+b+c)$;
b) $(4xy-5xz+8y^2-22yz+15z^2):(x+2y-3z)$;
c) $(mn-1{\cdot}2mo+1{\cdot}5n^2-3{\cdot}8no+2{\cdot}4o^2):(\frac{1}{5}m+0{\cdot}3n-\frac{2}{5}o)$.

68) a) $(x^2+2xz-y^2+z^2):(x-y+z)$;
b) $(a^2-ab-2ac-2b^2-5bc-3c^2):(a-2b-3c)$;
c) $(2d^2+de-2df-6e^2+17ef-12f^2):(2d-3e+4f)$.

69) a) $(bd+cd+ad-bc-b^2+ac+a^2):(a+d-b)$;
b) $(cd-ce-cf+ad-af-ae-bf-be+bd):(a+b+c)$;
c) $(14af+12ae+10ad-20cd-28cf-24ce-18be-21bf-15bd):(2a-3b-4c)$.

70) Dividiraj po Hornerovoj metodi divizije:
a) $(x^4-x^3-7x^2+x+6):(x-3)$;
b) $(x^4-15x^3+61x^2-39x+28):(x-7)$;
c) $(x^5+3x^4+3x^3+7x^2-11x-15):(x+3)$;

d) $(x^6-5x^5+4x^3-20x^2-2x+10):(x-5)$.

71) a) $\frac{x^3-y^3}{x-y}$; b) $\frac{x^3+y^3}{x+y}$; c) $\frac{x^3+8y^3}{x+2y}$; d) $\frac{27x^3-8y^3}{3x-2y}$.

72) a) $(7x^4+16x^6+10x^2-1):(4x^3-3x^2+2x+1)$;
b) $(1-3125a^{10}):(1+5a^2+25a^4+125a^6+625a^8)$;
c) $(-a^7+12a^5b^2-48a^3b^4+64ab^6):(12a^2b^2+6a^3b+a^4+8ab^3)$.

73) Očituje li se kakov zakon, po kojem idu članovi kvocijenta u divizijama:
a) $1:(1+px)$; b) $1:(1-px)$; c) $1:(1+2x+x^2)$;
d) $4xy:(1-2x)$; e) $3ab:(1-ab)$.

---

§. 9. F.

74) Izvedi naznačene divizije:

a) $x<y$ / $4=4$ (:)
b) $a<72$ / $8=8$ (:)
c) $a=72$ / $8<9$ (:)
d) $a>72$ / $8<9$ (:)
e) $a=(b+c)p$ / $m>p$ (:)
f) $a<72$ / $m>p$ (:)

Riješi ove jednadžbe:

75) a) $3\,.\,(4x)\,.\,14:21-5=11$; b) $72:3x-3=1$.

76) a) $12-\left[72:\frac{x}{3}-4\right]=8$; b) $20=144:\frac{27}{x}+4$.

77) a) $1000:\frac{130}{x+4}=100$; b) $\frac{3x-24}{8}+5=8$.

78) a) $\frac{70-5(x-3)}{10}=4$; b) $\frac{18x}{27}+6=(-3)(-4)$.

79) a) $\frac{33ax+77b}{11}=7b+3a$; b) $a:(b:x)=c:d$.

80) a) $(a+b)x=a^2+2ab+b^2$; b) $(3a+2b)x=21a^2+14ab$.

81) a) $(2a+b)x=4a^2-4ab-3b^2$; b) $(m+n)x-n^3=m^3$.

82) $(p-q+r)x=p^2-q^2+rp+rq$.

83) $a^2-x(a-3b)=3ba-ca+3bc$.

---

§. 10. Razlomljeni brojevi.

Definicija: I. $\frac{a}{b} \cdot b = a$ i onda, ako b nije djelilac od a.

II. $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$;

III. $\frac{a}{p} + \frac{b}{p} = \frac{a+b}{p}, \frac{a}{p} - \frac{b}{p} = \frac{a-b}{p}$;

IV. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$;

V. $\frac{a}{b} = m + \frac{r}{b}$, gdje je $r = a - mb$.

§. 10. A.

1) Koji su od razlomljenih brojeva, što dolaze, razlomci, a koji su cijeli brojevi, tek pisani u obliku razlomaka? a) $\frac{9}{3}$, b) $\frac{9}{4}$, c) $\frac{9}{5}$, d) $\frac{9}{9}$, e) $\frac{9}{18}$, f) $\frac{24}{25}$, g) $\frac{24}{6}$, h) $\frac{4}{6}$, i) $\frac{30}{6}$, k) $\frac{121}{11}$.

2) Piši kao razlomljene brojeve s nazivnikom 1 i s nazivnikom 2 ove cijele brojeve: a) 4, b) 40, c) 270.

3) Obrni ove razlomke: a) $\frac{4}{9}$, b) $\frac{7}{14}$, c) $\frac{24}{25}$, d) $\frac{127}{6}$, e) $\frac{4000}{370}$.

4) Što je obrnuta (recipročna) vrijednost od: a) $\frac{5}{8}$, b) $\frac{8}{16}$, c) $\frac{1}{2}$, d) 2, e) 400, f) $\frac{400}{406}$, g) $\frac{37}{370}$?

---

5) Krati po drugoj formuli u II. ove razlomke:

a) $\frac{4}{16}$, b) $\frac{21}{91}$, c) $\frac{476}{521}$, d) $\frac{26}{65}$, e) $\frac{400}{625}$.

6) Raširi razlomke, što dolaze, tako, da dobiju nazivnik 72:

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $\frac{1}{6}$, e) $\frac{9}{8}$, f) $\frac{5}{9}$, g) $\frac{7}{12}$, h) $\frac{11}{18}$, i) $\frac{23}{24}$, k) $\frac{41}{36}$.

---

§. 10. C.

Primijeni pravila za adiciju i suptrakciju razlomaka na ove primjere:

7) a) $\frac{7}{13} + \frac{4}{13}$; b) $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{11}{9}$; c) $\frac{11}{15} + \frac{2}{15} - \frac{1}{15}$.

8) a) $\frac{19}{16} - \left(\frac{11}{16} - \frac{3}{16}\right)$; b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

9) a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$; b) $\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$; c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{14} - \frac{2}{21}$.

10) a) $\frac{5}{3} + \frac{5}{7} - \frac{5}{9} + \frac{5}{11}$; b) $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$; c) $\frac{7}{8} - \frac{5}{9} - \frac{1}{12}$.

11) a) $4 + \frac{1}{3}$; b) $7 + \frac{5}{9}$; c) $7 - \frac{5}{9}$; d) $\frac{13}{2} - 5$.

12) a) $3 + \frac{7}{8} - \frac{9}{10} + \frac{11}{12} - \frac{14}{15}$; b) $4 - \frac{1}{3} + 5 + \frac{1}{8} - \frac{7}{12}$.

13) $4 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{8}\right) - \left(\frac{100}{27} - \frac{4}{9}\right) - \left(3 - \frac{15}{7} - \frac{3}{14}\right)$.

Primijeni pravilo za multiplikaciju razlomaka na ove primjere:

14) a) $\frac{3}{7} \cdot 2$; b) $\frac{4}{5} \cdot 6$; c) $\frac{7}{11} \cdot 15$.

15) a) $\frac{a}{5} \cdot 10$; b) $\frac{p^2}{2} \cdot 8$; c) $\frac{x^2y^3}{36} \cdot 24$.

16) a) $\frac{x^2}{y^2} \cdot 7$; b) $\frac{a^3}{b^4} \cdot 11$; c) $\frac{m^2n^3}{o^4p^5} \cdot 975$.

17) a) $\frac{p^3}{q^4} \cdot r^5$; b) $\frac{a^4}{b^5} \cdot b^6$; c) $\frac{c^2d^3}{e^4f^5} \cdot f^6g^7$.

18) a) $\frac{3a}{8b} \cdot 12c$; b) $\frac{4x^2}{35y^2} \cdot 49z^2$; c) $\frac{625c^2d^2}{3e^3f^4} \cdot 48e^5f^6$.

19) a) $\frac{4x^2}{3y^2} \cdot 0{\cdot}75xy$; b) $\frac{3 \cdot 125a^2b^2}{1 \cdot 875c^2d^2} \cdot 0{\cdot}6b^2c^2$;

c) $\frac{6\frac{3}{7}xy^2z^3}{5 \cdot 625x^3yz^2} \cdot 0{\cdot}875x^2y^3z$.

20) a) $\frac{a+b}{a^2+b^2}(a-b)$; b) $\frac{3x-4y}{9x^2+16y^2}(3x+4y)$;

c) $\frac{5m+6n}{25m^2-36n^2}(10m-12n)$.

21) a) $(a+b) \cdot \frac{c}{d}$; b) $(x^2-y^2) \cdot \frac{x^2}{y^2}$; c) $(10a^2b + 12ab^2)\frac{15c}{2ab}$.

22) a) $\left(\frac{a}{b}-c+d\right)e$; b) $\left(\frac{9p}{10q}+11+\frac{12r}{13s}\right)130qs$;

c) $\left(\frac{3a}{4b}-\frac{5b}{6c}-\frac{7c}{8d}\right)24b^2c^2d^2$.

23) a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$; b) $\frac{6}{35}\cdot\frac{7}{3}$; c) $\frac{4\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{0\cdot92}{0\cdot9}$.

24) a) $\frac{a}{6}\cdot\frac{7}{8}$; b) $\frac{9}{x^2}\cdot\frac{10}{27}$; c) $\frac{12\cdot3}{12\cdot5}\cdot\frac{3\cdot75}{p^2q^2}$.

25) a) $\frac{12}{13}\cdot\frac{p}{q}$; b) $\frac{14}{x^3}\cdot\frac{15}{y^4}$; c) $\frac{a^2b}{16}\cdot\frac{ab^2}{17}$; d) $\frac{m^3n^4}{36}\cdot\frac{24}{m^4n^3}$.

26) a) $\frac{abc}{xyz}\cdot\frac{x^2y^2z^2}{18}$; b) $\frac{19}{p^2q^2}\cdot\frac{p^2r^2}{q^2s^2}$; c) $\frac{mn^2o^2}{p^4q^5r^6}\cdot\frac{p^7q^8r^9}{20}$.

27) a) $\frac{x^2y^3}{z^4}\cdot\frac{x^4}{y^3z^2}$; b) $\frac{ab^2c^3}{d^4}\cdot\frac{d^3}{a^2b^3c^4}$; c) $\frac{14x^2y^2}{15z^2}\cdot\frac{20z^3}{21x^3y^3}$.

28) a) $\frac{2a-3b}{2a+3b}\cdot\frac{4a^2-9b^2}{4a^2+9b^2}$; b) $\frac{3x^2-9y^2}{4a^2+8b^2}\cdot\frac{3a^2+6b^2}{5x^2-15y^2}$;

c) $\frac{7a^2-14b^2}{10a^3+30b^4}\cdot\frac{20a^4+60ab^4}{21a^3-42ab^2}$.

29) a) $\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}$; b) $\frac{a^2b^3c^2}{a^3b^2c^3}\cdot\frac{ab^2c}{a^2bc^2}\cdot\frac{a^4b^3c^4}{a^3b^4c^3}$.

30) a) $\frac{x+y}{3x^2+3y^2}\cdot\frac{x-y}{7}\cdot\frac{21(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$;

b) $\frac{25a^2-36b^2}{25a^2+36b^2}\cdot\frac{5a-6b}{10a+12b}\cdot\frac{50a^2+72b^2}{(5a-6b)^2}$;

c) $\frac{2\cdot4x^4-9\cdot6y^6}{11x^2-539z^2}\cdot\frac{7x+49z}{7\cdot8x^2-15\cdot6y^3}\cdot\frac{28\cdot6x-200\cdot2z}{5\cdot6x^2+11\cdot2y^3}$.

Primijeni pravilo za diviziju razlomaka na ove primjere:

31) a) $\frac{1}{3}:4$; b) $\frac{5}{6}:7$; c) $\frac{8}{9}:10$.

32) a) $\frac{a}{5}:6$; b) $\frac{x^2}{10}:11$; c) $\frac{12m^3}{13}:14$.

33) a) $\frac{7}{x^2}:8$; b) $\frac{12}{a^3b}:4$; c) $\frac{96}{p^9q^6}:144$.

34) a) $\frac{x^2}{12}:y^2$; b) $\frac{a^2b^3}{23}:a^3b^2$; c) $\frac{m^4n^5o^4}{454}:m^5n^4o^5$.

35) a) $\frac{a^3}{b^4}:c^5$; b) $\frac{x^2y^3}{z^4}:xyz$; c) $\frac{p^5q^3r}{s^7}:pq^3r^5$.

36) a) $\frac{x^2+y^2}{x+y}:(x-y)$; b) $\frac{9a^2-4b^2}{3c+2d}:(3a-2b)$;

c) $\frac{16x^3y-25xy^3}{xy^2+x^2y}:(4x+5y)$.

37) a) $3:\frac{4}{5}$; b) $21:\frac{7}{8}$; c) $0\cdot024:\frac{3}{125}$.

38) a) $a:\frac{6}{7}$; b) $8:\frac{x^2}{9}$; c) $10:\frac{11}{p.q}$.

39) a) $a^3:\frac{b^4}{12}$; b) $xy^2:\frac{13}{x^2y}$; c) $14:\frac{a^3b}{cd^3}$.

40) a) $abcd:\frac{ab}{cd}$; b) $15a^2:\frac{16b^2}{17c^2}$; c) $3\frac{1}{7}x^5y^6z^7:\frac{22x^7y^5z^6}{7x^6y^7z^5}$.

41) a) $\frac{18}{19}:\frac{20}{21}$; b) $\frac{35}{36}:\frac{7}{108}$; c) $\frac{2\cdot4}{35}:\frac{7\cdot2}{385}$.

42) a) $\frac{1\frac{2}{3}}{4\frac{5}{6}}:\frac{7\frac{8}{9}}{a}$; b) $\frac{1\cdot23}{4\cdot56}:\frac{x^2}{7\cdot89}$; c) $\frac{1\cdot625}{p^2q^3}:\frac{2\cdot375}{19}$.

43) a) $\frac{p+q}{p-q}:\frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$; b) $\frac{x^2(4y^2-5z^2)}{2a^2(7b^2+8c^2)}:\frac{(8y^2-10z^2)x^2}{3a^2(28b^2+32c^2)}$;

c) $\frac{5\cdot2m^2-6\cdot5n^3}{11\cdot4o^4+17\cdot1p^5}:\frac{15\cdot6m^2-19\cdot5n^3}{3\cdot8o^4+5\cdot7p^5}$.

§. 10. D.

44) a) $\left(\frac{1\frac{3}{4}}{3\frac{1}{2}}-\frac{0\cdot525}{3\cdot5}\right):\frac{7}{20}$; b) $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}\right):\frac{a^2c^2}{b^2d^2}$.

45) a) $\left(\frac{9}{8}-\frac{7}{6}-\frac{5}{4}\right):\frac{31}{24}$; b) $\left(\frac{10ab^2}{11bc^2}+\frac{12cd^2}{13a^2d}-\frac{14ac^2}{15bd^2}\right):\frac{140a^2b^2}{143c^2d^2}$.

Izrazi rezultate u primjerima, što dolaze, s pomoću relativnih razlomaka:

46) a) $\frac{3}{7}-\frac{5}{7}$; b) $\frac{4}{9}:\frac{1}{3}-2$; c) $\frac{7}{8}-5+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}$.

47) a) $\frac{-18}{5}+\frac{1}{15}$; b) $\frac{-3}{-4}+\frac{1}{2}+\frac{-7}{-4}$; c) $\frac{-3\frac{3}{4}}{+15}+\frac{3\frac{3}{4}}{-15}$.

48) a) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)-\frac{9}{8}\cdot 8:3^2$; b) $3:(-5)+3.(-2)\cdot\frac{1}{9}$.

49) a) $72:(+24-29):18$; b) $\frac{-4}{2}\cdot(-8):\left[\left(-\frac{5}{3}\right):\left(+\frac{5}{9}\right)\right]$.

50) a) $\dfrac{7\cdot\frac{1}{11}-\frac{14}{4+2.3^2}}{1883}$; b) $\dfrac{-3}{4+5}+\dfrac{\frac{1}{2}}{4-7}-\dfrac{4.\left(-\frac{1}{8}\right)}{(2+1)^2.2}$.

51) $\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{4}}-\dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{1}{8}}+\dfrac{-3+\frac{9}{2}}{\frac{15}{16}}-\dfrac{4.\left(13-\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{1}{34}}{27-6.(0-1)}+\dfrac{0}{13:5.4.(-2)}$.

---

§. 10. F.

Ujednostruči s pomoću pravila za računanje s razlomcima izraze:

52) a) $\left(\frac{4}{3}a+\frac{1}{7}b\right)-\left(\frac{1}{9}a-\frac{5}{14}b\right)$; b) $7a.\frac{b}{a}-\left(2b+\frac{5}{3}b\right)$.

53) $\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{8}y-\frac{1}{10}z\right)-\left(\frac{2}{15}x-\frac{1}{4}y+\frac{10}{35}z\right)$.

54) $3ab-\left(\frac{1}{4}ac+5bc+\frac{9}{8}\right)+\left(\frac{4}{5}bc-\frac{1}{22}ac-\frac{7}{8}\right)$.

55) a) $\left(4a+\frac{1}{6}b-\frac{1}{3}c\right)\cdot\frac{6}{5}$; b) $\left(3a-\frac{1}{8}b+5\right):\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$.

56) $(4x-y).\frac{1}{2}+\frac{y}{2}-3\left(x-\frac{1}{4}\right)+4.\left(\frac{3}{16}-\frac{5}{2}x\right)$.

57) $\left(-\frac{1}{3}ab\right)\left(-\frac{3}{5}cd\right):\left(\frac{4}{3}ac\right):\left(\frac{3}{10}bd\right)-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}$.

58) a) $\left(\frac{4}{3}a+\frac{1}{5}b\right)\left(\frac{3}{4}a-5b\right)$; b) $\left(7a-\frac{1}{6}b\right)\cdot\left(12a-\frac{1}{7}b\right)$.

59) a) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y+1\right)\left(4x-\frac{1}{2}y+3.\frac{3}{4}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}+x\right)^2$.

60) a) $\left(\frac{a^2}{b}-\frac{4ab}{c}+\frac{3bc}{\frac{1}{2}a}\right)\cdot\frac{5}{6}abc$; b) $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$.

61) a) $\dfrac{3a(b+c)}{4b}\cdot\dfrac{16c}{9(b+c)}\cdot\dfrac{12b}{5c}$; b) $\dfrac{3a}{\frac{1}{5}b}\cdot\dfrac{4a}{c}-\dfrac{\frac{3}{4}a}{c}\cdot\dfrac{3a}{b}$.

62) $\dfrac{7(a+b)}{4c}:\dfrac{3d}{c}\cdot\dfrac{4a}{49}:\dfrac{\frac{1}{2}(a+b)}{16d}$. **63)** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\frac{1}{2}$.

64) a) $(ap^2+bp+c):\frac{1}{2}p$; b) $\left(\frac{6}{a^3}-\frac{3}{a^2}+\frac{9}{a}\right)\cdot\frac{1}{3}a^4$.

65) $\left(\frac{4ap}{5q}-\frac{7a^2p}{3qr}\right)\left(\frac{5q}{a}-\frac{3r}{14p}+\frac{qr}{a^2}\right)$.

66) $\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)+\frac{1}{3}(2x+y)+\frac{1}{6}(2x+4y)$.

67) $\dfrac{5}{2(a-1)}+\dfrac{7}{3(a-1)}-\dfrac{\frac{3}{4}}{6(a-1)}+\dfrac{\frac{1}{12}}{a-1}$.

Po pravilu za diviziju XI. pretvori u algebraičke sume ove kvocijente:

68) $\left(\frac{2}{5}a^2b-\frac{1}{4}ac^2+\frac{4}{5}ab^2-\frac{1}{2}bc^2\right):(a+2b)$.

69) $\left(\frac{4}{5}a^2b-\frac{1}{2}ac^2+\frac{8}{5}ab^2-bc^2\right):\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b\right)$.

70) $\left(6ac-3bc-\frac{42}{5}ad+\frac{21}{5}bd\right):\left(c-\frac{7}{5}d\right)$.

71) $\left(\frac{1}{4}pq-\frac{1}{2}p-\frac{3}{4}q+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{1}{2}q-1\right)$.

72) $\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{5}y-\frac{1}{10}z+\frac{1}{6}yz-\frac{1}{8}z^2\right):\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}z\right)$.

73) $\left(7a^4-\frac{46}{3}a^3b+27a^2b^2-\frac{56}{3}ab^3+10b^4\right):\left(\frac{a^2}{8}-\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4}\right)$.

74) $\left(7a^2-\frac{33}{10}ab+\frac{13}{3}ac+23bc-\frac{54}{5}b^2-\frac{110}{9}c^2\right):$
$:\left(\frac{7}{4}a+\frac{9}{5}b-\frac{11}{6}c\right)$.

75) $\left(\frac{81}{16}x^4-\frac{1}{81}y^4\right):\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$.

76) $\left(\frac{125}{216}a^3+\frac{1}{8}b^3\right):\left(\frac{5}{3}a+b\right)$.

---

77) Kojega su osnovnoga razlomka mnogokratnici (multipla) ovi razlomci: a) $\frac{4}{7}$, b) $\frac{8}{14}$, c) $\frac{1}{7}$, d) $\frac{2}{4}$, e) $\frac{57}{11}$, f) $\frac{63}{2}$.

78) Stari su Egipćani po Ahmesovoj knjizi, pisanoj oko g. 1700. prije Kr., upotrebljavali samo osnovne razlomke, pa su sve druge razlomke pisali kao sume osnovnih razlomaka s različitim nazivnicima. N. pr. $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, koji su razlomak prema tomu Egipćani označivali sa: a) $\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$, b) $\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$, c) $\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$, d) $\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$, e) $\frac{1}{6}+\frac{1}{23}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}$?

79) Kojega je cijeloga broja dio svaki od ovih razlomaka: a) $\frac{4}{7}$, b) $\frac{8}{14}$, c) $\frac{1}{7}$, d) $\frac{163}{13}$, e) $\frac{99}{100}$, f) $\frac{-18}{25}$.

80) Što je: a) sedmi dio od 4? b) dvanajsti dio od 19? c) deseti dio od $1m$? d) dvanajsti dio od 5 godina? e) osmina od $1l$? f) deseti dio od 11 cm?

---

§. 10. G.

81) a) Koliko je devetina u $3+\frac{4}{9}$? b) Kako se može kraće pisati $3+\frac{4}{9}$?

82) Pretvori ove neprave razlomke u mješovite brojeve: a) $\frac{37}{3}$, b) $\frac{37}{9}$, c) $\frac{432}{49}$, d) $\frac{102}{101}$, e) $\frac{3439}{243}$.

83) Pretvori ove mješovite brojeve u neprave razlomke: a) $3\frac{4}{7}$, b) $25\frac{1}{4}$, c) $16\frac{15}{16}$, d) $33\frac{1}{3}$, e) $1\frac{1}{999}$.

Izvedi **najzgodnijim načinom** adicije i suptrakcije u ovim primjerima:

84) a) $3\frac{1}{2}+5\frac{1}{9}$; b) $7\frac{3}{4}-5\frac{1}{6}$; c) $723\frac{3}{4}-423\frac{3}{16}$.

85) a) $\frac{7}{2}+\frac{46}{9}$; b) $4\frac{1}{2}+5\frac{1}{12}-3\frac{1}{6}$; c) $7\frac{7}{15}-3\frac{1}{5}+8\frac{7}{10}$.

86) a) $19-\frac{3}{28}-\frac{5}{14}-\left(2\frac{6}{7}-\frac{11}{8}\right)$; b) $-3\frac{3}{4}-5\frac{7}{8}+4\frac{15}{16}$.

87) a) $3\frac{1}{4}a-\frac{1}{6}b+\frac{11}{12}a-1\frac{20}{21}b$; b) $(3a-\frac{5}{4}b)-(2\frac{1}{15}a-3\frac{1}{12}b)$.

Izvedi ove multiplikacije i divizije:

88) a) $13\frac{3}{4}\cdot 5\frac{1}{8}+7\frac{1}{2}\cdot 4$; b) $\frac{4}{9}\cdot 6\frac{3}{4}-3\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}$.

89) $4\frac{1}{9}\cdot\frac{11}{37}+9\frac{1}{2}\cdot 9\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}\cdot 4\frac{1}{8}:3+\frac{17}{16}\cdot 3\frac{1}{17}:6\frac{1}{2}$.

90) $(3\frac{1}{3}+4\frac{1}{9})\cdot\frac{68}{67}-(1\frac{1}{2})^2-(4\frac{1}{2}+12\frac{5}{6}):19\frac{1}{2}$.

91) a) $(3\frac{3}{4})^2+(1\frac{1}{2})^2$; b) $(4\frac{1}{2})^2-(3\frac{2}{3})^2$.

Ujednostruči ove izraze:

92) $(4\frac{5}{6}ab-3\frac{1}{2}ac)-\frac{1}{2}a(5b-\frac{3}{4}c)$.

93) a) $(7\frac{1}{8}ab+3\frac{3}{4}ac):(3\frac{1}{2}a)$; b) $\frac{3\frac{1}{2}}{a}-\frac{5\frac{1}{4}}{b}-\left(\frac{7}{8a}-\frac{21}{4b}\right)$.

94) a) $(4\frac{1}{8}a-\frac{1}{15}b)(\frac{5}{33}a-1\frac{3}{22}b)$; b) $\frac{3}{4}(2x-\frac{1}{3}y)-\frac{1}{8}(\frac{4}{15}x+\frac{1}{30}y)$.

Odredi ostatak i kvocijent u divizijama:

95) a) $(x^3-5x^2+2x-3):(x^2-3)$;
b) $(x^3-9x^2+3x-51):(x^2+3x-15)$.

96) a) $(4x^3-3\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+7):(x^2-x-1)$;
b) $(3x^4-x^3-2x^2-x+16):(3x-8)$.

97) $(5\frac{1}{4}x^4+3\frac{1}{2}x^2-7x-11):(8x^4+\frac{1}{4})$.

98) $(72x^4+58x^3-16x^2-5x):(9x^2-\frac{7}{4}x+5)$.

99) $(x^4-3x^3y+5x^2y^2-xy^3+11y^4):(x^2-3xy+y^2)$.

100) $(32x^5+4\frac{1}{2}x^3y^2-7y^5):(4x^2-2xy+\frac{2}{3}y^2)$.

101) Gdje je pogrješka u ovom zaključivanju: a je makar kakov broj, a b neka bude njegova polovina. Dakle je $b=\frac{a}{2}$, dakle $4b=2a$, dakle $14b-10b=7a-5a$, dakle $5a-10b=7a-14b$, dakle $5(a-2b)=7(a-2b)$, a po tom $5=7$?

---

§. 10. H.

102) Koju vrijednost ima: a) $\frac{7}{a-a}$, b) $\frac{15}{\infty}$, c) $\frac{7}{o}+15$, d) $\frac{13}{x}$ za $x=o$, e) $\frac{47}{2x-6}$ za $x=3$, f) $\infty-\infty$, g) $7\cdot\infty+\frac{4}{o}-5$?

---

§. 10. I.

Riješi ove jednadžbe i ispitaj ispravnost riješenja supstitucijom vrijednosti dobivene za x:

103) a) $5x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$; b) $3 - \frac{1}{4}(x-7) = \frac{5}{16}$.

104) a) $4\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{5}\right) = -\frac{7}{3}$; b) $\frac{7}{8}\left[3\frac{1}{5} - \left(\frac{x}{7} + 1\frac{2}{35}\right)\right] = 1$.

105) a) $3\frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{2}}{x-7} = \frac{5^2}{6}$; b) $\frac{1}{x - \frac{1}{2}} = 4$.

106) a) $9 - \left[3 - \left(\frac{1}{2} - x\right)\right] = \frac{13}{5}$; b) $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$

Četvrti odsječak.

Primjene računskih operacija prvoga i drugoga stupnja (I. Dio).

§. 11. Razvijanje i ujednostručivanje izraza. Glavni oblik izraza.

Važne formule za transformaciju.

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

IV. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

V. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ili $\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$ ili $\frac{a^2-b^2}{a+b} = a-b$

VI. $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ ili $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$

VII. $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$ ili $\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2-ab+b^2$

§. 11. A. B.

1) Neka se pretvori u algebraičku sumu: a) $(2x+y)^2$; b) $(2x-y)^2$; c) $(2x+y)^3$; d) $(2x-y)^3$ primjenom formula I.—IV.

2) Neka se pretvori u algebraičku sumu: a) $\frac{4x^2-y^2}{2x-y}$; b) $\frac{4x^2-y^2}{2x+y}$;

c) $\frac{8x^3-y^3}{2x-y}$; d) $\frac{8x^3+y^3}{2x+y}$; e) $\frac{16x^4-y^4}{2x-y}$; f) $\frac{16x^4-y^4}{2x+y}$

s primjenom formula V.—VII. i njima sličnih.

Transformiraj izraze, što dolaze, s pomoću formula I.—VII.

3) a) $(x-1)^2$; b) $(2x+1)^2$; c) $(3a+2)^2$.

4) a) $(3a-2b)^2$; b) $(1-x)^2$; c) $(3x-5y)^2$.

5) a) $(x+y)^3$; b) $(4x+y)^3$; c) $(3p-2q)^3$.

6) a) $(a^2-b^2)^2$; b) $(2ab-5bc)^2$; c) $(\frac{1}{2}a-3b)^2$.

7) a) $(\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b)^3$; b) $(1\frac{1}{4}a-1)^3$.

8) a) $(4p - \frac{1}{2}qrs)^2$; b) $(3\frac{3}{4}a + \frac{4}{15}b)^2$.

9) a) $(p+q)(p-q)$; b) $(3p+q)(3p-q)$; c) $(x+4)(x-4)$.

10) a) $(2x-y)(2x+y)$; b) $(a+1)(a-1)$; c) $(100+1)(100-1)$.

11) a) $(1\frac{1}{3}p - 1\frac{1}{2}q)(1\frac{1}{3}p + 1\frac{1}{2}q)$; b) $(4a - \frac{1}{2}b)(4a + \frac{1}{2}b)$.

12) a) $(p-q)(p^2+pq+q^2)$; b) $(p+q)(p^2-pq+q^2)$.

13) a) $(3a-b)(9a^2+6ab+b^2)$; b) $(3a+b)(9a^2-6ab+b^2)$.

14) a) $(a+\frac{1}{2})(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4})$; b) $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$.

15) a) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$; b) $\dfrac{a^2+2a+1}{a+1}$.

16) a) $\dfrac{p^2-2p+1}{p-1}$; b) $\dfrac{p^2-q^2}{p-q}$.

17) a) $\dfrac{9x^2+6x+1}{3x+1}$; b) $\dfrac{9x^2-1}{3x+1}$; c) $\dfrac{25a^2-20ab+4b^2}{5a-2b}$.

18) a) $\dfrac{4p^2-\frac{1}{9}q^2}{2p+\frac{1}{3}q}$; b) $\dfrac{a^3-x^3}{a-x}$; c) $\dfrac{a^3+x^3}{a+x}$.

19) a) $\dfrac{27a^3-1}{3a-1}$; b) $\dfrac{p^3+\frac{1}{125}q^3}{p+\frac{1}{5}q}$.

20) a) $\dfrac{1-x^4}{1-x}$; b) $\dfrac{16-x^4}{2+x}$; c) $\dfrac{81a^4-\frac{1}{16}b^4}{3a-\frac{1}{2}b}$.

21) a) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$; b) $\dfrac{1+x^3}{1-x+x^2}$; c) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

22) a) $\dfrac{p^3-q^3}{5}\cdot\dfrac{15}{p-q}$; b) $\dfrac{27a^3-8b^3}{a-\frac{2}{3}b}$; c) $\dfrac{\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}y^2}{3x-4y}$.

23) a) $\dfrac{\frac{4}{9}a^2x^2-b^2}{\frac{2}{3}ax+b}$; b) $\dfrac{b^2+2bc+c^2-a^2}{b+c-a}$; c) $\dfrac{x^2-2xy+y^2-9z^2}{x-y+3z}$.

Pretvori u produkt od dva ili više faktora s pomoću formula za transformaciju:

24) a) u^2-v^2; b) $9a^2-4b^2$; c) x^4-y^4; d) $9p^2-1$;
e) $\dfrac{a^2b^2}{c^2}-25$.

25) a) $9a^2+6ab+b^2$; b) a^4-2a^2+1; c) $a^2+2ab+b^2-c^2$;
d) $a^2-b^2+2bc-c^2$.

26) a) $p^3-3p^2q+3pq^2-q^3$; b) $8x^3+12x^2+6x+1$.

27) a) x^3-1; b) x^3+1; c) $125a^3+343$.

28) a) p^4-16q^4; b) $\frac{81}{16}p^4-q^4$.

29) a) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-c^3$; b) $a^3-b^3+3b^2c-3bc^2+c^3$.

S obzirom na formule I.—VII. skrati razlomke:

30) a) $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}$; b) $\dfrac{4a^2-b^2}{(2a-b)^2}$; c) $\dfrac{a^2b-ab}{a^2-1}$; d) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3+b^3}$.

31) a) $\dfrac{p^4q^4-x^4}{3p^2q^2-3pqx}$; b) $\dfrac{a^4-b^4}{a^4+2a^2b^2+b^4}$;

c) $\dfrac{a^3+x^3}{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}$.

32) a) $\dfrac{(3a-4)^3}{9a^2-16}$; b) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x}$; c) $\dfrac{\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{81}y^4}{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)^3}$.

S obzirom na formule I.—VII. neka se pretvore u jedan kvocijent ovi izrazi:

33) a) $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{b-2a}{a^2-b^2}$; b) $\dfrac{q}{3p+q}-\dfrac{3p}{3p-q}$.

34) a) $\dfrac{2x+7}{9x^2-9}-\dfrac{11}{15x+15}-\dfrac{4-x}{x^2-x}$;

b) $4+\dfrac{a}{2a-1}+\dfrac{3a^2-5}{4a^2-1}$.

35) a) $\dfrac{x}{25-5x}+\dfrac{5}{5x+25}-\dfrac{25}{25x-x^3}$;

b) $\dfrac{a^2b}{a^3+b^3}+\dfrac{3b}{a+b}+\dfrac{5ab}{a^2-ab+b^2}$.

S pomoću formula I.—VII. izvedi ove formule:

36) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

37) $(a-b+c)^3 = a^3-b^3+c^3-3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c-3bc^2-6abc$.

38) $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

39) $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.

40) Po formuli $a^2 = (a+b)(a-b)+b^2$ izračunaj, izabravši za a najbliži broj s *o* ili *oo* na desnom kraju:

a) 29^2, b) 31^2, c) 28^2, d) 89^2, e) 93^2, f) 105^2, g) 107^2, h) 122^2, k) 253^2, l) 797^2, m) 425^2, n) 625^2, o) 1024^2, p) 4096^2.

41) S pomoću formule V. izračunaj:

a) 54^2-46^2, b) 89^2-11^2, c) 121^2-21^2, d) 704^2-4^2, e) 343^2-257^2, f) 1024^2-24^2.

§. 11. B.

42) Divizije od $(a-b)$ u $\overline{a^2-b^2}$, u a^3-b^3, a^4-b^4, a^5-b^5 izlaze bez ostatka. Pokaži to i za diviziju od $a-b$ u a^6-b^6.

43) Što će postati od formule:

a) $\frac{a^5-b^5}{a-b}=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$;

b) $\frac{a^6-b^6}{a-b}=a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$, ako se u njima prometne b u $(-b)$?

44) Koje će od niže naznačenih divizija izaći bez ostatka, a koje ne?

a) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$, b) $\frac{a^3-b^3}{a+b}$, c) $\frac{a^3+b^3}{a+b}$, d) $\frac{a^3+b^3}{a-b}$,

e) $\frac{a^4-b^4}{a-b}$, f) $\frac{a^4-b^4}{a+b}$, g) $\frac{a^4+b^4}{a+b}$, h) $\frac{a^4+b^4}{a-b}$,

i) $\frac{x^5+y^5}{x+y}$, k) $\frac{x^6-y^6}{x+y}$, l) $\frac{x^7-y^7}{x-y}$, m) $\frac{x^8+y^8}{x+y}$,

n) $\frac{x^2-64y^6}{x+2y}$, o) $\frac{x^5-32}{x+2}$.

45) U kojima će od pređašnjih 14 divizija imati svi članovi kvocijenta znakove plus, a u kojima izmjenice znakove plus i minus?

§. 11. C.

46) Izvedi s pomoću Pascalova trokuta $(a+b)^5$.

47) Nastavi Pascalov trokut do koeficienata od $(a+b)^{10}$.

48) Izvedi na toj osnovi: a) $(a+b)^7$, b) $(a-b)^6$, c) $(1+x)^5$.

49) Što mora da bude koeficient člana a^9b u razvijanju izraza $(a+b)^{10}$?

---

§. 11. D.

Pretvori u **razvijenu** algebraičku sumu izraze:

50) $(5a-2b-3c)(a+b-c)-(5a-b)(a+b-4c)$.

51) $(15a-27b+9c-12):(-7+10^2-3\,.\,2^5)$.

52) $(150a^2+155a+18):(15a+2)-(91a^2-89a-36):(13a+4)$.

53) $[(a+b)^4-(a-b)^4]:2+4ab(a^2+ab+b^2)-(a+b)^4$.

54) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

55) a) $(x-1)(x-2)x-3)$; b) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

56) $(3x+4y-1)^2-(2x+y-5)(x+y-1)+4(x+y)(3x-y+1)$.

Jednadžbe, što dolaze, jesu identične. Neka im se lijeve strane tako transformiraju, da izadju jednostavnije desne strane:

57) a) $\frac{a+b}{4}-\frac{6a+3b}{12}+\frac{4b+a}{4}=b$; b) $1-\frac{x-2y}{x+2y}=\frac{4y}{x+2y}$.

58) a) $\frac{3}{22}ab\left(\frac{11}{ab}-\frac{22}{ab}+\frac{1}{\frac{3}{11}ab}\right)=-1$; b) $\frac{(\frac{1}{2}a-\frac{2}{9}b):\frac{ab}{36}}{\frac{3}{2b}-\frac{2}{3a}}=12$.

59) a) $\frac{4xy-4xz}{3y^2-3yz}\cdot\frac{9xy}{8}=\frac{3x^2}{2}$; b) $1+\frac{2p+3q}{2p-3q}=\frac{4p}{2p-3q}$.

60) a) $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}-2=\frac{(p-q)^2}{pq}$; b) $\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}=p$.

61) a) $(x-2)^2+8x=(x+2)^2$; b) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

62) a) $\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}=q$; b) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-x}=1$.

63) $\frac{2(3a-2b)}{3(3a-b)}-\frac{b^2-15ab}{54a^2-18ab}-\frac{1}{2}=\frac{3a+b}{18a}$.

64) $\frac{\frac{3a-12b}{4}-\frac{a-18b}{6}}{\frac{a}{a-4b}-\frac{4b}{a+4b}}\cdot\frac{a+\frac{16b^2}{a}}{\frac{7a}{16b}-\frac{14b}{2a}}=\frac{4ab}{3}$.

65) $\frac{(a+1)^2}{a^2-1}+\frac{a^2-1}{(a+1)^2}=\frac{2a^2+2}{a^2-1}$.

66) $\left(\frac{5b-3a}{2b}+\frac{5a-6b}{4b}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a}{a-b}\right)\cdot\left(4a+\frac{4b^2}{a}\right):$
$:\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a^2+b^2}{-2b}$.

Svedi na glavni (kanonički) oblik izraze:

67) a) $\frac{4ab}{cd+e}:(4f+g)$; b) $\frac{2x-7}{5x-9}\cdot(3x+11):(x+1)$.

68) a) $\frac{3ax+by}{4x+y}:\frac{5ax-by}{4x-3y}$; b) $\frac{3a-4b}{a}-\frac{3a+b}{b}$.

69) a) $\frac{7a-x}{2a}+\frac{4x-a}{3x}+\frac{1}{6}$; b) $\frac{3a-6\frac{1}{2}}{5a-27\frac{1}{2}}+\frac{17}{20}-1\frac{1}{4}a-11\frac{3}{4}$.

70) a) $\left[\frac{4a-b+c}{6}-\frac{3a+7b-c}{14}\right]:(a+b)$;

b) $\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{9}\right)$.

*

71) a) $\left(\frac{3a}{5b}-\frac{7a}{6b}\right)\left(\frac{15b}{7a}-\frac{12b}{49a}\right)$; b) $\left(\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{3}b}-\frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{3}a}\right)(4a-b)$.

72) a) $\frac{x^2-ax}{a^2}-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2-x}$; b) $\frac{a^3}{2a^2b-8b^3}-\frac{a^2}{a^2-4b^2}$.

73) a) $\frac{3a+5}{6a-9}-\frac{2a^2+5a-1}{4a^2-9}$; b) $\frac{4a^2-12a+9}{(2a+3)^2}:\frac{2a-3}{2a+3}$.

74) $\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{1}{a^2-b^2}$.

75) a) $\frac{a-\frac{121b^2}{a}}{1+\frac{11b}{a}}$; b) $\frac{\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}}$; c) $\frac{3ab-\frac{4c^3}{a}+\frac{a^3+b^3}{a+b}}{\frac{7c^3}{a+b}+11ab}$.

76) $\frac{4a^2-25-(2a+5)(2a-5)}{\frac{7a^2}{b+c}-4ab+\frac{9}{a+b+c}}+\frac{a^4-b^4}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}$.

§. 12. Svojstva prirodnih brojeva.

(Riječ „broj“ znači u ovom paragrafu svagda „prirodni broj“.)

§. 12. A.

1) Nađi s pomoću Eratostenovoga sita sve primbrojeve između 1 i 50.

2) Rastvori u produkt primfaktora: a) neparne brojeve između 100 i 200; b) brojeve između 400 i 500, koji su djeljivi na 6; c) sve brojeve s tri cifre, koji su djeljivi na 32.

3) Koliko je primbrojeva: a) ispod 100, b) u drugoj stotini, c) u devetoj stotini?

4) Koje djelioce ima: a) 72, b) 90, c) 120, d) 1000, e) 999.

5) Koliko djelilaca ima: a) 14400, b) 70000, c) 3072.

6) Koliko djelilaca ima: a) $2^5.3^6.5^7.13^2$, b) $3^8.11.13.17.31^2$.

7) Koji brojevi ispod 50 imaju oblik $4n+1$?

8) Kako se zovu brojevi, koji imaju oblik: a) $2n$, b) $2n+1$?

9) Što je općeni oblik broja, koji s obzirom na divizor 3 daje ostatak 1?

10) Što je općeni oblik brojeva, koji daju s obzirom na divizore: a) 4, b) 5, c) 6, d) 7, e) 8, f) 9, ostatak 1?

11) Koji primbrojevi ispod 100 imaju oblik: a) $8n+1$, b) $8n+3$, c) $8n+5$, d) $8n+7$?

12) Zašto je svejedno, da li se reče „broj oblika $8n+7$“ ili „broj oblika $8n-1$“?

13) Koji oblik imaju parni brojevi, koji nisu djeljivi na 4?

14) Godine 1582 uveden je u katoličkim zemljama, a god. 1700. u protestantskim zemljama gregorijanski kalendar, po kojem 1) svaka godina, koja nije djeljiva na 4, 2) svaka godina, kojoj je broj djeljiv na 100, ali nije djeljiv na 400, ima 365 dana, a sve ostale godine (prestupne godine) imaju 366 dana. Godina 1883. počela je s ponedjeljkom. Kojim su danom u nedjelji počele godine: a) 1800, b) 1700, c) 1600, d) 1840, e) 1714, f) 1618?

15) Na koji je dan u nedjelji bilo: a) 9. lipnja 1790. (krunitbeni sabor ugarsko-hrvatski); b) 15. studena 1796. (hrvatski krajišnici junački brane most pred Arkolom); c) 27. svibnja 1806. (general Lauriston ulazi u Dubrovnik); d) 10. siječnja 1835. (izlazi prvi broj „Danice“); e) 19. travnja 1848. (Jelačić preuzme vladati kao ban); f) 11. kolovoza 1814. (rodio se Ivan Mažuranić); g) 18. kolovoza 1872. (umro Petar Preradović); h) 19. listopada 1874. (Ban Mažuranić otvara svečano hrvatsko sveučilište Franje Josipa I. u Zagrebu)?

---

16) Koji su od brojeva, što dolaze, djeljivi: a) na 4, b) na 25, c) na 9, d) na 3, ali ne na 9; e) na 11?
α) 4732, β) 7152, γ) 47300, δ) 75625, ε) 734584398.

17) Ispitaj, jesu li brojevi, što dolaze, djeljivi: a) na 2, b) na 4, c) na 8, d) na 10, e) na 25, f) na 9, g) na 11, h) na 7 i k) na 13;
α) 425691, β) 7534625, γ) 43,172893, δ) 333333333,
ε) 142857142857, ξ) 10^6, η) 10^7 ϑ) 2^{10}, ι) 3^4+4^4, $\varkappa$) 15.5^5,
λ) $13.5^5+19.2^5$.

18) Odredi, koje ostatke daju brojevi, što dolaze kod divizije na 4, a da ne izvedeš diviziju: a) 4026, b) 1896, c) 43575, d) 183454.

19) Odredi istim načinom, koje će ostatke dati kod divizije na 25 brojevi: a) 43577, b) 13841, c) 134735, d) 40675.

20) Na koje se tri cifre mora prema predašnjoj zadaći svršavati broj, da mu bude broj 125 djelilac?

21) Koje su godine u dvadesetom stoljeću (1901—2000) prestupne?

22) Tijelo se giba po krugu s opsegom od 125 m, pa je pošavši s određene točke na tom opsegu u svemu prevalilo 378596 m. Koliko je m udaljeno od točke s koje je pošlo?

§. 12. C.

23) Koje ostatke devetice daju faktori produkta 3457814.88930, a koji ostatak devetice daje sam produkt?

24) Napiši broj makar s koliko cifri, potpiši pod njega drugi broj s istim ciframa, ali u drugom redu, pa suptrahiraj manji broj od većega. Diferencija bit će svagda djeljiva na 9. Zašto?

25) Odredi bez divizije, koje ostatke daju brojevi: a) 4321, b) 12212, c) 5876, d) 27506, e) 278942, f) 123456789 dividirani na 9.

26) U misli mi je neki broj i od njega suptrahiram drugi broj, koji se piše istim ciframa, ali u drugom redu. Ostatak je $6419 \cdot 758$, gdje je . na mjestu jedne cifre, koja je izostavljena. Koja je ta cifra?

27) Odredi bez izvađanja divizije, koje ostatke daju kod divizije na 9 produkti: a) $57098 . 298765$, b) $36729 . 58643$.

28) Isto tako odredi, koji ostatak daje produkt:

$$437 \times 586 \times 2719 \times 5871.$$

29) Isto tako odredi ostatke kod divizije na 9 u:
a) 357934^2, b) 27915^3, c) 4856431^5.

30) Koje će ostatke kod divizije na 9 dati: a) 4^9, b) 4^{37}, c) 7^{49}, d) 2347^{55}, e) 5^7, f) 3866^{47}, g) 8^{31}?

31) Načini „probu s deveticom" kod ovih računa:
a) $47321 . 792417$, b) 2^{10}, c) 67^3, d) $1024 . 25^4$.

32) Može li se po ispravnoj probi s deveticom svagda zaključiti, da je račun prav?

33) Koji ostatak daje kod divizije na 11 produkt brojeva:
a) 387×597, b) 3791584×2765432?

34) Kako se načini „proba sa jedanaest? Je li svagda ispravna?

---

§. 12. D.

35) Odredi rastvaranjem u primfaktore najveći zajednički djelilac (najv. zajedn. mjeru) ovih brojeva:
a) 84, 576; b) 156, 6852, 1080; c) 425, 625, 700, 11075; d) 567, 3591, 2016, 7623, 8631.

36) Odredi rastvaranjem u primfaktore najveći zajednički djelilac izraza: $\alpha)$ $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$; $\beta)$ $3a + 9b$, $a^2 - 9b$, $a^2 + 6ab + 9b^2$, $7a + 21b$; $\gamma)$ $(a+b)^2 - c^2$, $ad + bd + cd$.

37) Odredi s pomoću verižne divizije najveći zajednički djelilac k:
a) 13608 i 9072, b) 3213 i 4284, c) 17496 i 21168, d) 205369 i 1557799.

Odredi s pomoću verižne divizije najveći zajednički djelilac izraza:

38) $12x^2 + 5x - 3$ i $6x^2 + x - 1$.

39) $6x^3 + 13x^2 + 15x - 25$ i $2x^3 + 4x^2 + 4x - 10$.

40) $3x^5 - x^4 - 3x + 1$ i $3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$.

41) $a^7 - 3a^4 - 4a^3 - 3a^2 - a$ i $a^6 - a^4 - 2a^3 - 3a^2 - 2a - 1$.

42) $a^4 - y^2$ i $a^3 + (a+1)ay + y^2$.

43) $2y^6 + 2y^5 - 3y^4 - 5y^3 - 14y^2 - 7y$ i
$2y^5 + 2y^4 - 5y^3 - 5y^2 - 7y - 7$.

44) $2x^6 - x^5 - 5x^3 - 5x^2 - x$ i $2x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x - 1$.

45) $x^6 + 4x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 12x - 9$ i
$6x^5 + 20x^4 - 12x^3 - 48x^2 + 22x + 12$.

46) Upotrijebi verižnu diviziju, da kratiš razlomke:
a) $\frac{1764}{2772}$; b) $\frac{30866}{47397}$; c) $\frac{63063}{1638}$; d) $\frac{475875}{739125}$; e) $\frac{43395}{341637}$;
f) $\frac{10395}{85185}$; g) $\frac{6935}{61393}$; h) $\frac{30120}{235689}$; i) $\frac{38360}{261807}$.

47) S pomoću verižne divizije krati kvocijente:
a) $\frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3}$; b) $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 11x + 30}$; c) $\frac{a^3 + \frac{1}{2}a^2 - 4a + 2\frac{1}{2}}{a^2 - 1\frac{5}{7}a + \frac{5}{7}}$;
d) $\frac{5a^2x + 15ax^2}{a^2 - 9x^2}$; e) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$;
f) $\frac{x^7 - 3x^6 + 2x^5 - x^2 + 3x - 2}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$; g) $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^5 + x^3 - x^2 - 1}$.

§. 12. E.

Neka se odredi najmanji zajednički multiplum (mnogokratnik) rastvaranjem u primfaktore:

48) a) 26, 36, 27; b) 14, 21, 18;
c) 12, 100, 75, 80, 240; d) 111, 1332, 144, 999;
e) 2, 3, 14, 26, 49, 91, 126; f) 315, 441, 567, 378;
g) $3ax$, $6by$, $2ab$, xy; h) $12b^2$, $15a^2$, $25ab^2$, $10b^3$, $18a^2b$;
k) $x + y$, $3x - 3y$, $6xy + 6y^2$, $x - y$;
l) $x - 2$, $2x - 1$, $x^2 - 4$, $2x + 4$;
m) $x^2 - 1$, $x + 1$, $x - 1$, $x^4 - 1$;
n) $7a - 14b$, $14a - 28b$, $8a - 16b$.

U izrazima, što dolaze, neka se sastave svi kvocijenti u jedan kvocijent, odredivši im **glavni** (generalni) **nazivnik** rastvaranjem u primfaktore.

49) a) $\frac{4}{9} - \frac{4}{21} + \frac{5}{12} - \frac{1}{28}$; b) $5\frac{1}{36} - \frac{200}{117} + 2\frac{1}{108}$.

50) $\dfrac{7c}{15a-45b}-\dfrac{ab}{3ac-9bc}+\dfrac{ac-bc}{30a^2-270b^2}$.

51) $\dfrac{11}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{5}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2+3x+4}{x^4-1}$.

52) a) $\dfrac{a-b}{ab}+\dfrac{c-a}{ac}+\dfrac{b-c}{bc}$;

b) $\dfrac{3(x-y)}{4}-\dfrac{5(2x-3y)}{6}+\dfrac{7(x-2y)}{8}$.

53) a) $\dfrac{3}{2x-4}-\dfrac{5}{6x-12}-\dfrac{2}{3x+6}$; b) $\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{4a}{a^2-1}$.

54) a) $\dfrac{5a}{4b^2}-\dfrac{2c^3}{3d}-\dfrac{7}{9x}-\left(\dfrac{3a}{8b^2}+\dfrac{5c^3}{6d}-\dfrac{3}{x}\right)$;

b) $\dfrac{4a^2}{3}-\dfrac{3am}{4}+\dfrac{m^2}{6}-\left(\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{am}{3}-\dfrac{3m^2}{4}\right)$.

55) $z-\dfrac{y^2z-5xy^2z+x^3}{y^2-yz}+2xy-\dfrac{2xy^2-z^2}{y-z}-3xz$.

S pomoću verižne divizije odredi najmanji zajednički multiplum ovih brojeva i izraza:

56) a) 1411 i 3569; b) 3696, 1632 i 4675: c) 1600, 2304 i 3136.

57) $17(a^2-b^2)c$, $5(a+b)c$, $85a^2c(a+b)$.

58) a^3-a^2-a+1 i a^3-a^2+a-1.

59) x^3+8 i x^4-16.

60) $a^3+3a^2b+3ab^2+2b^3$ i $2a^3+a^2b+ab^2-b^2$,

61) $x^3+6x^2+11x+6$ i $2x^2+5x+2$.

62) $x^4+3x^3y+6x^2y^2+5xy^3+3y^4$ i $x^3+x^2y+xy^2-3y^2$.

63) $24x^5+2x^4+8x^3+4x^2+2$ i $3x^4+4x^3+1$.

64) $3x^5+5x^4+6x^3+6x^2+3x+1$ i $x^4+x^3+x^2+x+1$.

65) $3a^2+a-2$, $3a^2+5a+2$ i $9a^3+9a^2-4a-4$.

66) x^3-y^3, x^2+xy+y^2 i $x^4+x^2y^2+y^4$.

67) $a^5+2a^4b+a^3b^2+a^2b^3+2ab^4+b^5$, $a^4+2a^3b+2a^2b^2+2ab^3+b^4$ i $a^3+a^2b-ab^2-b^3$.

Sastavi u jedan kvocijent odredivši verižnom divizijom glavni (generalni) nazivnik ove kvocijente:

68) a) $\dfrac{x-8}{x^2-5x+6}+\dfrac{x+2}{x^2-9x+14}$;

b) $\dfrac{3x-2}{x^2-x-6}-\dfrac{5x-3}{x^2+x-12}$.

69) $\dfrac{z^4-2z^2-3}{15z^6-17z^2-18+25z^4}-\dfrac{z^2-4z+1}{12z^4-z^2-6}$.

70) $\dfrac{my-n}{y^2+(m+n+p)y+(m+n)p}-\dfrac{ny+m}{m^2+2mn+n^2-y^2}$.

71) $\dfrac{5x-2}{x^2-3x-4}+\dfrac{2x+1}{x^2-x-12}-\dfrac{3x-1}{x^2+x-20}$.

72) $\dfrac{x-1}{x^2-7x+10}-\dfrac{x+2}{x^2-9x+14}-\dfrac{x-3}{x^2-12x+35}$.

Neka se odredi prava numerična vrijednost kvocijenata, što dolaze za dodane specijalne vrijednosti općenoga broja, pošto su dividend i divizor kraćeni najvećim zajedničkim djeliocem:

73) a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ za $x=1$; b) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}$ za $x=-3$.

74) a) $\dfrac{5a^2-5ab}{a^2-b^2}$ za $a=b$; b) $\dfrac{a^3-5a^2+3a+9}{a^3-a^2-21a+45}$ za $a=3$.

75) a) $\dfrac{x^4+2x^3-18x^2-6x+45}{x^4+3x^3-21x^2-9x+54}$ za $x=3$;

b) $\dfrac{6x^2-11x-10}{8x^2-34x+35}$ za $x=\frac{5}{7}$.

§. 13. Sustavi brojeva i znaci za brojeve.

I. $N_b=a_0+a_1.b+a_2.b^2+a_3.b^3+\ldots\ldots+a_n.b^n$.

II. $N_{10}=a_0.1+a_1.10+a_2.10^2+a_3.10^3+\ldots\ldots+a_n.10^n$.

§. 13. B.

1) Napiši rimskim znakovima brojeve:
a) 173, b) 305, c) 350, d) 1896, e) 688.

2) Napiši u „heksadičnom sustavu“ (baza 6) s ciframa 0, 1, 2, 3, 4, 5 brojeve, koji se u dekadičnom sustavu ovako pišu:
a) 25, b) 43, c) 64, d) 96, e) 100, f) 216.

3) Dekadični broj 1888 neka se prenese: a) u diadični (baza 2) sistem s ciframa 0, 1; b) u tetradični sistem (baza 4) s ciframa 0, 1, 2, 3; c) u oktadični sistem (baza 8) s ciframa 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

4) Prenesi dekadični broj: a) 9958, b) 14195 u: α) sustav šestice; β) u sustav devetice.

5) Prenesi u dekadični sustav ove brojeve, koji se pišu u diadičnom sustavu, koji ima samo cifre 0 i 1, ovako:
a) 11, b) 101, c) 1001, d) 11111, e) 100011.

6) Neka se prenesu u dekadični sustav brojevi:
a) (VII) 35624, b) (VI) 32045, c) (IX) 72085,
d) (XII) $3\varrho 79\psi$, gdje je ϱ znak za broj 10, a ψ znak za broj 11.

7) Neka se prenesu:
a) (VIII) 271352 u sustav devetice.
b) (V) 24132 u sustav dvanajstice.
c) (XII) 100 u sustav četvrtice.
d) (VI) 501223 u sustav petice.

8) Izračunaj riješenjem jednadžbe, kod koje se baze moraju dekadični brojevi, što dolaze, tako pisati, da iza cifre 3 dolazi cifra 1: a) 7; b) 13; c) 19; d) 37.

9) Izračunaj sumu:
a) $21201 + 210021 + 22211$ za bazu 3.
b) $3146 + 213 + 31324$ za bazu 7.
c) $24421 + 52326 + 4062$ za bazu 8.
d) $52793 + 1500\varrho + 8234$ za bazu 11.

10) Odredi diferenciju:
a) (V) 41203 — 22412.
b) (VII) 3216 — 233.
c) (IX) 83767 — 21235.
d) (XII) $3\varrho 279\psi - 15\varrho 376$.

11) Odredi produkt:
a) $33 . 44$ za bazu 5.
b) 2033×2013 za bazu 4.
c) 12303×2130 za bazu 8.
d) $3572 . 38$ za bazu 9.
e) $7\varrho 256 . 379$ za bazu 11.

12) Izvedi divizije, što dolaze:
a) $231013 : 543$ za bazu 6.
b) $24420220 : 2204$ za bazu 5.
c) $1522730 : 330$ za bazu 8.

13) a) (IV) $221303332 : 2312 = ?$ b) (XII) $11\varrho\psi 3\varrho\varrho 2 : 3\varrho\psi = ?$

---

§. 14. Decimalni razlomci.

$$N_{10} = \ldots a_3 . 10^3 + a_2 . 10^2 + a_1 . 10 + a_0 . 1 + b_1 . \frac{1}{10} + b_2 . \frac{1}{10^2} + b_3 . \frac{1}{10^3} + \ldots\ldots$$

§. 14. A.

1) Kako se piše kraće:
a) $2 . 10^3 + 3 . 10^2 + 6 . 10 + 7 . 1 + 3 . \frac{1}{10}$;
b) $4 . 1 + 9 . \frac{1}{10} + 7 . \frac{1}{1000}$; d) $8 . \frac{1}{100} + 9 . \frac{1}{1000}$;
c) $4 . \frac{1}{10} + 8 . \frac{1}{100} + 9 . \frac{1}{1000}$; e) $3 . \frac{1}{10^2} + 5 . \frac{1}{10^4} + 7 . \frac{1}{10^7}$.

2) Napiši decimalne razlomke, što dolaze, prvo kao sumu, drugo kao kvocijent:
a) 4·273; b) 0·419; c) 23·538; d) 0·35452; e) 0·0021; f) 0·2005; g) 32·000807.

3) Kako se piše:
a) $\frac{43}{10}$; b) $\frac{43}{100}$; c) $\frac{43}{1000}$; d) $\frac{9247}{10000}$; e) $\frac{879234}{10000}$; f) $\frac{731}{10000}$?

4) Načini decimalni razlomak, koji ima 3 desetice, 3 jedinice, 3 desetine i 6 stotaka.

5) Čim se raširi kvocijent izražen decimalnim razlomkom, ako mu se doda 5 nula?

6) Čim se multiplicira decimalni razlomak, ako mu se točka pomakne na desno: a) za 3 mjesta, b) za 2 mjesta, c) za 5 mjesta, d) za 6 mjesta, e) za 10 mjesta?

7) Na što se dividira decimalni razlomak, ako mu se točka pomakne na lijevo: a) za 3 mjesta, b) za 4 mjesta, c) za 5 mjesta?

8) Što se mora učiniti s decimalnom točkom, ako treba decimalni razlomak multiplicirati:
a) sa 1000; b) sa 10000; c) sa 1000000?

9) Što se mora učiniti s decimalnom točkom, ako treba decimalni razlomak dividirati: a) na 10; b) na 1000; c) na 100.000?

10) Kako si pomažemo, ako treba u decimalnom razlomku, koji ima samo jednu decimalu, točku pomaknuti za 4 mjesta na desno?

11) Kako si pomažemo, ako u decimalnom razlomku, koji ispred točke ima samo dva mjesta, treba pomaknuti decimalnu točku za 5 mjesta na lijevo?

12) Čitaj decimalne razlomke, što dolaze: 1) kao obične razlomke, 2) kao mješovite brojeve, 3) kao sumu jednoga cijeloga broja i tolikih razlomaka, koliko je decimalnih mjesta:

a) 7·82, b) 52·027, c) 0·5349, d) 0·0807.

13) Raširi razlomke, što dolaze, tako, da bude nazivnik dekadična jedinica (10, 100, 1000 itd.):

a) $\frac{9}{5}$; b) $\frac{3}{25}$; c) $\frac{7}{160}$; d) $\frac{249}{250}$; e) $\frac{1}{6400}$.

---

§. 14. B. C.

14) Na koje tri vrste decimalnih razlomaka dovodi pretvaranje običnih razlomaka u decimalne?

15) Zašto se ne mogu pretvoriti u decimalne razlomke, kojima bi bio nazivnik jedna od dekadičnih jedinica, ovi razlomci:

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{11}{15}$; c) $\frac{17}{70}$; d) $\frac{81}{55}$.

16) Pretvori samim raširivanjem u decimalne razlomke:

a) $\frac{13}{64}$; b) $\frac{9}{15625}$; c) $\frac{27}{25000}$; d) $\frac{23}{4000}$; e) $\frac{501}{8000}$.

17) Kakovi će decimalni razlomci izaći iz ovih običnih razlomaka:

a) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{33}{40}$, $\frac{37}{200}$, $\frac{49}{160}$, $\frac{69}{500}$, $\frac{127}{625}$, $\frac{a}{2^n}$, $\frac{b}{5^r}$, $\frac{c}{2^n 5^r}$;

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{28}{33}$, $\frac{70}{99}$, $\frac{20}{37}$, $\frac{92}{111}$, $\frac{202}{303}$;

c) $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{79}{88}$, $\frac{89}{150}$, $\frac{307}{600}$, $\frac{753}{1665}$?

18) Odredi unaprijed koliko će cifri imati perioda u svakom decimalnom razlomku, koji će izaći iz razlomaka napisanih pod b) u predjašnjoj zadaći?

19) Odredi unaprijed koliko će pretperiodičnih mjesta imati svaki decimalni razlomak, koji će izaći iz običnih razlomaka napisanih pod c) u predašnjoj zadaći.

20) Smjesti svaki od običnih razlomaka, što dolazi, među dvije granice izražene decimalnim razlomcima, koji se razlikuju:

1) za $\frac{1}{10}$; 2) za $\frac{1}{100}$; 3) za $\frac{1}{1000}$; 4) za $\frac{1}{10000}$; 5) za $\frac{1}{100000}$:

a) $\frac{5}{3}$; b) $\frac{7}{27}$; c) $\frac{4}{231}$; d) $\frac{5}{17}$; e) $\frac{700}{639}$; f) $\frac{23}{570}$.

21) Izjednači svaki od običnih razlomaka, što dolaze, s decimalnim razlomkom, kojemu je pogrješka 1) manja od $\frac{1}{10}$, 2) manja od $\frac{1}{100}$, 3) manja od $\frac{1}{1000}$:

a) $\frac{5}{33}$; b) $\frac{24}{33}$; c) $\frac{1000}{93}$; d) $\frac{94}{97}$; e) $\frac{100}{99}$; f) $\frac{20}{91}$.

---

§. 14. D.

22) Neka se pretvore u obične razlomke ovi konačni decimalni razlomci:

a) 0·25, b) 0·625, c) 0·032, d) 10·24, e) 3·45, f) 0·128, g) 3·875, h) 0·3248,

i neka se skrate što više dobiveni obični razlomci.

23) Neka se pretvore u obične razlomke ovi čisto-periodični decimalni razlomci:

a) $0\cdot\dot{2}\dot{9}$, b) $0\cdot\dot{6}\dot{3}$, c) $0\cdot\dot{4}0\dot{7}$, d) $0\cdot\dot{5}9\dot{2}$,
e) $0\cdot\dot{1}41\dot{9}$, f) $0\cdot\dot{2}07\dot{9}$, g) $0\cdot\dot{1}78\dot{2}$, h) $1\cdot\dot{4}6341\dot{1}$,
k) $0\cdot\dot{9}23076\dot{9}$, l) $0\cdot\dot{2}30769\dot{2}$, m) $0\cdot\dot{7}14285\dot{5}$, n) $4\cdot\dot{2}85714\dot{2}$,
p) $42\cdot\dot{8}57142\dot{8}$, q) $0\cdot\dot{1}53846\dot{1}$,

pa neka se onda krate što više dobiveni obični razlomci.

24) Neka se pretvore u obične razlomke ovi mješovito periodični decimalni razlomci:

a) $0\cdot2\dot{6}$; b) $0\cdot0\dot{3}\dot{6}$; c) $0\cdot5\dot{8}\dot{3}$; d) $0\cdot52\dot{7}$;
e) $0\cdot342\dot{7}$; f) $0\cdot033\dot{7}\dot{8}$; g) $0\cdot583414\dot{6}\dot{3}$;
h) $0\cdot00571428$; i) $0\cdot01925$; k) $0\cdot7439540$.

i neka se onda skrate što više dobiveni obični razlomci.

---

§. 14. F.

Izračunaj ove algebraičke sume potpunih decimalnih razlomaka:

25) 0·5723 + 10·1298 — 7·3246 + 3·182497.
26) 14·232 — (7·38 + 4·9) — (19·74 — 18·7) + 11·11.
27) 20·473 — 11·201 — (0·43 + 0·002) — 3·482.
28) 35·76 — [4·238 — (0·712 + 1·5)] — 2·0031.
29) 0·412 — 7·31 + (11·824 — 16·532) — 3·8.
30) — 0·00412 — 3·412 + 9·876 — (11·123 — 0·001).

Izračunaj ove izraze:

31) 83·142 . 0·587 + 2·872 . 0·0014 — 2·1 . 5·007.
32) (0·1257 + 3·142 — 1·7) . 5·83 — 3·4 . 5·67 + 1·23.
33) $(4·12)^2$ + 5·34 — 3·876 + (13·51 + 0·007) . 51.
34) $(3·4 + 0·71)^2$ + 3·874 . 5·1 — 6 . 5·3287.
35) (4·912 — 0·723) . (5·7192 — 0·0012) — $(2·18)^2$.

36) Izračunaj po Lagrangeovoj metodi pokraćene multiplikacije ove produkte potpunih decimalnih razlomaka:

a) 387·9076 × 47·567 na jedinice.
b) 0·06185 × 7856·7835 na 1 decimalu.
c) 0·870685 × 0·78436 na 4 decimale.
d) 4567·567 × 0·8076 na 3 decimale.
e) $9·7608^2$ na jedinice; f) $9·4605^2$ na desetine.
g) $6·7564^2$ na 3 decimale.

37) Odredi kvocijente ovih potpunih decimalnih razlomaka po metodi pokraćene divizije:

a) 5792·605628 : 90·2873 na 4 decimale.
b) 193·6415 : 0·54613 na 3 decimale.
c) 84·3725 : 0·009453 na 2 decimale.
d) 73·8261 : 0·972865 na 4 decimale.
e) 0·3585921 : 7·52961 na 3 decimale.
f) 15·382981 : 5·34682 na 2 decimale.

38) Izračunaj na 2 decimale izraz:

$$\frac{49876 . 0·037542 . 68·7075}{7·81649 . 578·93 . 28·4299}.$$

---

§. 15. Temeljne operacije s nepotpunim cijelim brojevima.

§. 15. A.

1) Pokrati kako treba na 3 decimale ove decimalne razlomke:
a) 2·734976; b) 0·023136; c) 14·83621; d) 124·035568;
e) 0·274632; f) 5·274059; g) 16·965842; h) 0·054369;
i) 2·34672.

2) Pokrati decimalne razlomke, što dolaze, tako, da bude pogrješka manja od $\frac{1}{2000}$:
a) 0·98732, b) 4·25681, c) 0·00423, d) 71·3489,
e) 1·34257, f) 1·3425001, g) 7·1299, h) 0·012099,
i) 1·342499.

3) Razlomci $\frac{12}{13}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{25}{23}$ neka se pretvore u decimalne razlomke sa 6 decimala tako, da bude pogrješka manja od polovine jedinice na šestom mjestu i neka se naznači, je li pogrješka pozitivna ili negativna.

4) Broj 18·39596482 kg neka se toliko pokrati, da bude pogrješka:
a) manja $\frac{1}{2}$ miligrama, b) manja od $\frac{1}{2}$ grama.

5) Ako se zna, da podatak 5·325 sati nije posvema točan, nego da je iza treće decimale izostavljeno nekoliko decimala, kolika može da bude najviše pogrješka u sekundama?

6) Ako se zna, da je u podatku 18·3562 dana posljednja decimala 2 postala korekturom, koliko sekunda može da bude pogrješka?

---

§. 15. B.

7) U zadaćama, što dolaze, jesu decimalni razlomci kako treba pokraćeni. Kolika je u svakoj sumi maksimalna pogrješka i koja je od ovih suma pouzdana na polovinu jedinice posljednjega mjesta:

a)	b)	c)
0·2583	0·38569	5·281635
2·7194	8·27134	7·394162
4·3142	9·21743	6·251964
0·7298	6·42833	5·876567

8) Razlomci $2\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{7}$, $7\frac{3}{16}$, $8\frac{5}{44}$, $9\frac{7}{26}$ neka se pretvore u decimalne razlomke i onda adiraju tako, da bude suma pouzdana do polovine jedinice na trećem mjestu. Što je ta suma?

9) Neka se adiraju oni nepotpuni decimalni razlomci, koji su pravo pokraćeni:

a)	b)	c)
0·7282	12·3982746	0·1325
0·8253	8·21764	6·43869
0·92876	5·13821	7·29653
0·527563	7·45836	8·763423
0·927386	3·9216	7·387691

---

10) Odredi diferencije decimalnih razlomaka:
a) 6·3582963... — 0·9386736... na 4 decimale točno.
b) 3·8216729... — 1·9837218... na 2 decimale pouzdano.

11) Pretvori $42_{\frac{7}{9}}$ i $24_{\frac{8}{7}}$ u decimalne razlomke i izračunaj njihovu diferenciju pouzdano do polovine jedinice u četvrtoj decimali.

12) Na koliko se decimalnih mjesta može razviti diferencija: 83·5946 — 76·983658, gdje je posljednja cifra u oba decimalna razlomka korigirana? Kako glasi ta diferencija, pouzdana na polovinu jedinice posljednjega mjesta?

---

13) U zadaćama, što dolaze, jesu posljednja decimalna mjesta pravo pokraćena. Neka se odrede pouzdani produkti:

a) 1·62861 × 0·5932	b) 16·2861 × 0·05932
c) 0·162861 × 0·5932	d) 16·2861 × 59·32
e) 1628·61 × 59·32	f) 1628·61 × 5932

14) Ako produkt obaju pokraćenih brojeva 0·38256 × 0·7385 dobije ime „metri", kolika je granica pogrješke (maksimalna pogrješka) u milimetrima?

15) Je li druga decimala u produktu 5·2346... × 9·835... pouzdana? Između kojih je granica prava vrijednost produkta?

16) Od dvaju beskonačnih decimalnih razlomaka poznajemo samo prvih sedam decimala: 0·5139285... i 0·8274314...; na koliko se mjesta može produkt pouzdano razviti i što je taj produkt?

17) Neka se razviju točno na jedinice produkti:
a) 6935·286 × 821·765, b) 569·9175 × 513·82.

18) Izvedi multiplikacijom pouzdano na 2 decimale kvadrat od:
a) 34·026, b) 5·032, c) 382·064.

---

19) U primjerima, što dolaze, jesu dividendi potpuni decimalni brojevi, a posljednja su mjesta u divizorima kako treba korigirana. Koja se pouzdana mjesta dobivaju u kvocijentu:
a) 83·291 : 47·382, b) 0·8139 : 6·52382,
c) 0·093 : 7·56, d) 3241 : 0·73985.

20) Ako se decimalni razlomci kvocijenta 9·8372583... : 4·7358261... pokrate kako treba na 5, na 4, na 6 decimala, koje će pouzdane kvocijente dati?

21) U naznačenom kvocijentu 18·613 : 8·235836 neka se oba decimalna razlomka pokrate na 6 decimala i divizija izvede pokraćenim načinom; koliko će pouzdanih mjesta biti u kvocijentu?

22) Opseg je kruga 50·358267.. m, $\pi = 3{\cdot}1415926\ldots$; kako se točno može odrediti polumjer toga kruga, ako se oba decimalna razlomka pravo pokrate na 4 decimalna mjesta?

23) Kolika je točnost rezultata u pređašnjem zadatku, ako se dividend pokrati na 4, a divizor na 5 decimala?

24) Neka se odredi što točnije kvocijent:
0·3982... : 0·82756...

25) Neka se izvedu pouzdano na 4 decimale divizije:
a) 73·8261 : 0·972865, b) 0·3585921 : 7·52961,
c) 15·382981 : 5·34682.

Primjene.

26) Godišnja rudarska produkcija vrijedi: α) u Češkoj 45,989.892 K, β) u Šleskoj 12,329.204 K, γ) u Štajerskoj 11,690.844 K. Odredi diferenciju od α) i β) točno na 10 K, od α) i γ) točno na 100 K, od β) i γ) točno na 1000 K.

27) Wörthersko je jezero dugačko 16·695 km, a široko 1·837 km. Kolika je pljoština, ako se uzme da je pravokutnik?

28) Litar žive važe (kod 0°C) 13·59593 kg. Za koliko kruna (K) treba kupiti žive, da se napuni posuda od 5·387 l, ako 1 kg stoji 7 K?

29) Na zemaljskom je ekvatoru daljina dviju mjesta, kojima je razlika geogr. dužine 1°, jednaka 111·307 km ili 15 geogr. milja. Na 45. stupnju širine (Senj) je ta daljina 0·7071 puta tolika. Koliko je km (geogr. milja) daljina dviju mjesta na 45.° širine, ako je razlika njihovih dužina jednaka 4°45′?

30) Kolika je pljoština kruga, ako je $r = 2{\cdot}178$ m?

31) Neka se izračuna, koliko dana, sati, minuta i sekunda ima jedna godina, ako se uzme, da je jednaka 365·24222 dana.

32) Svjetlost treba 8·22 minuta, da prevali put od sunca do zemlje (= 20,658.000 geogr. milja). Koliko milja prevali svjetlost u 1 sekundi?

33) Mjesec je od središta zemlje udaljen 384410 km, te je 60·27 puta tako dalek, kao jedna točka na površini zemlje. Kolik je prema tomu polumjer zemlje?

34) Iz 0·435 t (bačava à 1000 kg) dobiva se 118·842 m^3 rasvjetnoga plina. Koliko će m^3 plina dati: a) 5·85 t, b) 63·56 t?

35) Premjer je zemlje 1718·8734 geogr. milja, premjer sunca 186859 geogr. milja; koliko je puta premjer sunca veći od premjera zemlje? (2 dec. točno).

36) Premjer je zemlje na ekvatoru 1718·8734 geogr. milja, a spljoštenost je zemlje $= \frac{1}{299 \cdot 1528}$; kolika je prema tomu osovina, koja sastavlja oba pola?

37) Jedan mjesečev mjesec t. j. vrijeme od jednoga mlađa do drugoga je 29·530588 dana. Koliko mjesečevih mjeseca ima u 19 sunčanih godina, ako se svaka računa 365·24222 dana? (3 decimale).

Peti odsječak.

Primjene računskih operacija prvoga i drugoga stupnja (II. dio).

Linearne jednadžbe. Proporcije.

§. 16. Jednadžbe I. stupnja s jednom nepoznanicom u aritmetičkom govoru.

A. Nema razlomaka ni zagrada. x je cio broj.

§. 16. A. B.

1) $4x - 5 + 3x = 2x + 40$. **2)** $4 + 13x = x + 40$.

3) $11 - x = 4x + 2 - 6x$. **4)** $40x = 11 + 2x + 27$.

5) $14 - 7x = 4x - x - 3x$. **6)** $x = 7x + 5x + 198$.

7) $40 - 3x - 2x + 5 = -2x - 3$.

8) $x + 2x + 3x = 23x - 17$.

9) $4x - 5x + 19 - 107 = 110$. **10)** $80x + 23x = 100x + 3$.

11) $11x + 12 - 13x = 14x - 164$.

12) $15 - 16x + 17 - 18x = 440$.

13) $19x - 20 + 21x - 786 + 22x = 0$.

14) $23x - 24 + 25x - 26 + 27x - 25 = 0$.

15) $28x - 29 + 30x - 31 + 32x - 54 = 33x$.

16) $34x + 35 - 36x - 37 + 38x - 39 - 40x + 33 = 0$.

17) $17x + 25 - 31x = 16 - 101x + 9$.

18) $47 - 8x = 9x + 29 + 137x + 18$.

B. Ima zagrada, ali nema razlomaka. x je cio broj.

19) $5 + (3 - x) = 0$. **20)** $7 - (6 - x) = 0$.

21) $20 = 19 - (17 - 3x)$. **22)** $9 - (8 - x) = 7 - (x - 6)$.

23) $20 - (19x - 18) = 15 - (17 - x)$.

24) $30 - (29 - 28x) = 29 - (28 - 27x)$.

25) $3x + (x - 7) = 2x - 3$. **26)** $4 - (x - 7) = 7x - 69$.

27) $32 - (4x + 8) = 11x - 21$. **28)** $3(x + 15) - 40 = 305$.

29) $100 - 7(x + 2) = 38 - x$.

30) $432 - 2(x + 5) = 200 - (x - 11)$.

31) $4x + 18 - (x + 50) = 2 - (x + 18) + 2x$.

32) $2(x + 3) = x + 13$. **33)** $4(5 - x) = 17 - x$.

34) $8(7x-6)=37x+9$. **35)** $5x-(8-x)+7(6-x)=0$.

36) $11(x-12)-(x-13)=9x$.

37) $19-(18-17x)-16(15x-14)+222x=0$.

38) $3(4x-5)-6(7-8x)-63=0$.

39) $2(3-4x)+5(6x-7)=37$.

40) $19-108x-2(5-39x)+3(101x-3)=0$.

41) $7-9(19x-10)+7(17x-10)=27$.

42) $10(20x-30)-40(50-60x)-70(80x-90)=4000$.

43) $3(4-x)+5(16+x)-18x=x-(x-28)$.

44) $3(9-2x)+5(11-x)-28=7(x+4)-28$.

45) $3(7+3x-2)+50(x-10)=4(3+x)\,.\,2+1$.

46) $8(9x-24)-24+11(x-3)-32(2x-6)=13-(x+10)$.

47) $3\,.\,4(x-50)-[4-(x+7)]=10x-100-4(x-28)$.

48) $2^5\,.\,(7-x)+7x+1+5(x+3)=2^2\,.\,5^2\,.\,(4x-27)$.

49) $2\{2(2[2(2x+1)+1]+1)+1\}=126$.

C. Ima razlomaka, ali nema zagrada i x nije u nazivniku.

50) a) $x+0{\cdot}5=1{\cdot}5$; b) $x-0{\cdot}2=1{\cdot}8$;
c) $4{\cdot}3-x=0{\cdot}3$.

51) a) $0{\cdot}2x+0{\cdot}3=0{\cdot}9$; b) $0{\cdot}4x-0{\cdot}5=1{\cdot}9$;
c) $6{\cdot}7-0{\cdot}8x=1{\cdot}1$.

52) a) $0{\cdot}9x+10=1{\cdot}9x-11$; b) $2{\cdot}3x-4{\cdot}5=6{\cdot}7x-13{\cdot}3$;
c) $8{\cdot}9-10{\cdot}11x=1{\cdot}89x-3{\cdot}1$.

53) a) $12\,34x-23{\cdot}4+34{\cdot}56x=26{\cdot}9x+16{\cdot}6$;
b) $0{\cdot}45-0{\cdot}56x+0{\cdot}67=0{\cdot}44x-3{\cdot}88$;
c) $0{\cdot}789x-0{\cdot}891+0{\cdot}912x=10{\cdot}109+0{\cdot}701x$.

54) a) $12{\cdot}3x-23{\cdot}4+34{\cdot}5x=45{\cdot}6+36{\cdot}8x+31$;
b) $5{\cdot}67+6{\cdot}78-7{\cdot}89-8{\cdot}91x+12{\cdot}22+1{\cdot}13x=0$;
c) $1{\cdot}234x+2{\cdot}345+3{\cdot}456x+4{\cdot}567=7{\cdot}912+3{\cdot}69x$.

55) a) $2{\cdot}4+4{\cdot}6x+6{\cdot}8+8{\cdot}2x=2{\cdot}4x+6{\cdot}4+6{\cdot}8x+2{\cdot}8$;
b) $1{\cdot}02x-2{\cdot}03-3{\cdot}04x-4{\cdot}05-5{\cdot}06x-6{\cdot}07+7{\cdot}08x+12{\cdot}15=0$;
c) $1{\cdot}001-2{\cdot}002x-3{\cdot}003+4{\cdot}004x+5{\cdot}005=6{\cdot}006x+3{\cdot}003$.

56) a) $\frac{x}{4}+5=x+2$; b) $\frac{x}{5}-8=3x-36$.

57) a) $4\,.\,\frac{x}{3}-1=8x-24+\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+x=4x-\frac{1}{5}$.

58) a) $3x-4\frac{1}{2}-5x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}$.

59) a) $\frac{1}{9}x+\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}=8$; b) $2x-\frac{x}{3}+\frac{x}{6}-12=15$.

60) a) $-x+\frac{x}{8}-\frac{x}{72}=\frac{8}{9}$; b) $\frac{1}{5}x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{20}=4x-4$.

61) a) $5x-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{4}{3}x+\frac{5}{2}$; b) $\frac{432x}{48}=x+8$.

62) a) $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}x=1$; b) $2x+\frac{x}{9}=\frac{x}{12}+\frac{1}{36}$.

63) a) $2\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}=-\frac{1}{2}$; b) $\frac{4x}{9}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}x+\frac{5}{9}=0$.

64) a) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}-5=0$; b) $\frac{5x}{6}-\frac{7x}{8}=\frac{9x}{10}-11$;
c) $12-\frac{13x}{14}=\frac{15x}{16}-\frac{17x}{18}$.

65) a) $1\frac{1}{2}x+2\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}x=4\frac{4}{5}+5\frac{5}{6}x$;
b) $1\frac{2}{3}x-2\frac{3}{4}-3\frac{4}{5}x+4\frac{5}{6}+5\frac{6}{7}x=0$;
c) $1\frac{3}{5}x+3\frac{5}{7}+5\frac{7}{9}x+7\frac{9}{11}=9\frac{11}{13}x$.

66) a) $\frac{3x}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5x}{4}-\frac{6}{5}=\frac{7x}{6}+\frac{2}{15}$;
b) $\frac{5}{3}-\frac{7x}{5}+\frac{9}{7}-\frac{11x}{9}+\frac{13x}{11}-2\frac{20}{21}=0$;
c) $2\frac{1}{3}x+1\frac{4}{5}+1\frac{4}{7}x-1\frac{4}{9}-1\frac{4}{11}x-\frac{16}{45}=0$.

67) a) $3\frac{3}{4}x-14\frac{8}{9}=\frac{7x}{9}-\frac{3}{4}x$;
b) $\frac{x}{3}+\frac{9x}{8}-\frac{1}{16}+\frac{13x}{64}=\frac{27x}{8}-\frac{11}{32}-\frac{x}{64}$.

68) a) $\frac{x}{8}-\frac{x}{16}+\frac{x}{6}-\frac{3x}{32}+\frac{5x}{48}=\frac{4}{3}-x-\frac{7x}{4}$;
b) $x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}x+\frac{1}{27}x+\frac{1}{81}x+\frac{1}{243}x=36\frac{2}{5}$.

69) a) $\frac{4x+1}{10}-\frac{2x+11}{12}=\frac{24-2x}{15}$;

b) $\frac{x-13}{4}+\frac{19-3x}{6}-\frac{3x+16}{9}-\frac{17-x}{18}=1$;

c) $400-\frac{x}{6}+399\frac{2}{3}-\frac{3x+5}{12}-\frac{9x+1}{2}=0$.

70) $\frac{4x-1}{16}+\frac{5-x}{48}-\frac{7-2x}{432}+\frac{11-x}{108}=\frac{20-x}{36}$.

D. x dolazi u nazivniku.

71) a) $\frac{6}{x}=3$; b) $\frac{8}{x}-2=0$; c) $5-\frac{15}{x}=0$.

72) a) $\frac{12}{x}+2=6$; b) $\frac{14}{x}-5=2$; c) $19-\frac{18}{x}=16$.

73) a) $\frac{9}{x}+3=\frac{18}{x}$; b) $\frac{26}{x}-10=\frac{6}{x}$; c) $2-\frac{24}{x}=\frac{26}{x}$.

74) a) $\frac{1}{2x}+\frac{2}{3x}=\frac{7}{12}$; b) $\frac{5}{6x}-\frac{4}{5x}=\frac{1}{30}$;

c) $\frac{127}{216}-\frac{7}{8x}=\frac{8}{9x}$.

75) a) $\frac{1}{3x}+\frac{4}{5}-\frac{6}{7x}=\frac{29}{105x}$; b) $\frac{3}{4x}-\frac{99}{280}+\frac{6}{7x}=\frac{9}{10x}$;

c) $\frac{11}{12x}+\frac{12}{13}+\frac{14}{15x}-\frac{1201}{260x}=0$.

76) a) $\frac{5}{3x}+3\frac{4}{5}+\frac{7}{5x}+5\frac{6}{7}=\frac{46}{15x}$;

b) $\frac{9}{7x}-7\frac{8}{9}-\frac{190}{77x}+9\frac{10}{11}+\frac{13}{11x}=0$;

c) $\frac{59}{56x}-\frac{2}{5}-\frac{3}{7x}=\frac{5}{8x}-\frac{4}{9}$.

77) a) $\frac{110}{x-1}=\frac{22}{x-1}+8$; b) $\frac{1}{x+1}+\frac{5}{2x+2}=\frac{3}{2}$;

c) $\frac{1}{x+1}+\frac{5}{2x+2}=1$.

78) a) $\frac{7}{x+1}-\frac{11}{2x+2}=\frac{5}{2}$; b) $\frac{4}{2x+2}+\frac{31}{3x+3}=\frac{1}{6}$.

79) a) $\frac{13}{x-2}+\frac{7}{5x-10}=4$; b) $\frac{15}{3-2x}-\frac{2}{6-4x}=14$.

80) a) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-x}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-x}$; b) $\frac{11}{\frac{1}{2}-x}=\frac{4}{1-2x}+28$.

81) a) $\frac{4}{12x+15}-\frac{5}{8x+10}+\frac{7}{6}=0$;

b) $\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1+\frac{1}{x+2}}{1-\frac{1}{x+2.}}=3$.

E. Ima razlomaka i zagrada.

82) a) $\frac{3(3-x)}{5}+2=0$; b) $\frac{7-(6-x)5}{2}=1$;

c) $\frac{3(4-5x)}{6}+8=0$.

83) a) $\frac{4}{5(6-x)}=0{\cdot}8$; b) $\frac{3}{(x-4)\,5}=0{\cdot}4$;

c) $\frac{5}{6(7x-8)}-\frac{1}{24}=0$.

84) a) $\frac{x-3}{2}=\frac{3(x-4)}{5}$; b) $\frac{5x-6}{7}=\frac{2(7x-13)}{15}$;

c) $\frac{7x-8}{4}=\frac{5(6x-17)}{7}$.

85) a) $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x-2}$; b) $\frac{11}{(x-12)3}=\frac{7}{x-2}$;

c) $\frac{3}{5(x-24)}=\frac{7}{4(x-1)}$.

86) a) $\frac{2(x-3)}{5}+\frac{3(x-1)}{7}=5$;

b) $\frac{5(x-5)}{4}-9+\frac{4(2x-13)}{5}=0$;

c) $\frac{2(5x-4)}{3}-\frac{3(4x-9)}{11}=11$.

87) a) $\frac{3(x-4)}{5}-\frac{4(x-5)}{7}-\frac{16}{35}=0$;

b) $\frac{3(4x-5)}{2}=\frac{4(5x-6)}{3}+0{\cdot}5$;

c) $\frac{x-1}{2}+\frac{(x-3)3}{4}-\frac{(x-5)5}{6}=1\frac{5}{12}$.

88) $\frac{1}{5}(4x+1)-\frac{1}{6}(2x+11)=\frac{4}{15}(12-x)$.

89) $\frac{13x+10}{9}-\left(\frac{4x}{5}+\frac{3x-7}{15}\right)=\frac{11-x}{45}$.

90) $\frac{7x+8}{3}-\frac{4}{9}(x+3)-\frac{1}{8}(4x-1)=\frac{x}{36}$.

91) $\frac{x}{4}-\frac{1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{12-x}{12}=4+\left(16-\frac{x}{4}\right)$.

92) $4x-\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{9}\right)=\frac{4x+5}{9}+\left(\frac{2x-1}{6}+\frac{4x+16}{9}\right)$.

93) $\frac{3x+7}{8}-\left(\frac{x+1}{2}-1\right)=\frac{5x+7}{16}-\left(\frac{3x+1}{4}-\frac{x-1}{8}\right)$.

94) $20-\left[\frac{5x}{4}-\left(\frac{2x}{9}+\frac{1}{18}\right)\right]=x-\left(\frac{1}{3}+\frac{x}{9}\right)-2$.

F. Ima i članova s x^2, x^3 i t. d., koji se ukidaju.

95) $(3x+5)(2x-1)=(6x+1)x$.

96) $(7x-2)(9x+1)=(3x+5)(21x-1)$.

97) $(4x+5)(x+7)=(2x-3)(2x+3)$.

98) $(4x-11)(9x+2)=(3x+11)(12x-1)$.

99) a) $\frac{x-10}{x-9}=\frac{x-8}{x-6}$; b) $\frac{2x-3}{7x-18}=\frac{4x+9}{14(x-2)}$.

100) $(x-1)(72x+5)-13x=(4x+1)18x+11$.

101) $(x+1)(x+2)+(3x-4)x=2x(2x+7)$.

102) $(x+3)^2-x(x+4)=16(x+5)-3(2-x)$.

103) $-(9x+1)(x-1)+4-3x=16-3x(3x+5)$.

104) $\left(4x+\frac{1}{4}\right)\left(2x-\frac{1}{8}\right)=8x(x+4)-1$.

105) $\frac{4x}{5}-\frac{x}{10}+\frac{3}{x+5}=\frac{7x+1}{10}$.

106) $-3\frac{3}{4}(x+1)-\frac{x^2}{4}=\left(4-\frac{x}{2}\right)\left(4+\frac{x}{2}\right)$.

107) $(3x-1)^2+\left(4x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(5x+\frac{1}{2}\right)^2$.

108) $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=3\,.\,(x+4)^2$.

109) $\frac{4x-1}{x-1}-\frac{x}{x+1}=3$.

110) $\frac{4x+3}{2x-5}=\frac{3x+1}{x-5}-1$.

111) $\frac{2x-\frac{3}{4}}{x+9}=\frac{1-(\frac{1}{2}-2x)}{x-1\frac{1}{2}}$.

112) $\frac{1}{x}+\frac{3x}{x+1}=3$.

113) $\frac{(7x+9)(4x-1)}{4x(2x+3)}=3\frac{1}{3}$.

114) $\frac{(4x+5-\frac{1}{2}x)x}{\frac{1}{2}(x^2+1)}=7$.

115) $(x+1)(x+2)(x+3)=x(x+7)(x-1)$.

116) $(x^2-1)^2-(x^2+3)^2+8x^2=4(x+5)-90$.

117) $(2x-5)(x+1)+4x^2=(x+1)^3-(x-1)^3$.

118) $\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x+3}-\frac{2x}{x+4}=\frac{3x^2+16}{(x+2)(x+3)(x+4)}$.

119) $\frac{x+3}{x+8}+\frac{x+8}{x+6}+\frac{x+2}{x+4}=\frac{x+10}{x+8}+\frac{x-2}{x+6}+\frac{x+5}{x+4}$.

§. 16. D.

G. Jednadžbe s općenim brojevima.

120) a) $x-a=b-x$; b) $m-x+n=x-p$;
c) $a+x-b=c-x+d$.

121) a) $2x+3a=4x-5a$; b) $7x+8a-9x=11x-5a$;
c) $3a+4x+5b=9a-2x+11b$.

122) a) $6a-7b+67x-2a-3b=4a-17x-10b$;
b) $2x-3a+4b-5c+6x=7a-9b+10c-11x-10a+13b-15c$;
c) $19x-18a+17b-16c+15x-14d=10a-12b-14c+15d-28a+29b-2c-29d$.

123) a) $a-(b-x)=b-(x+a)$;
b) $a-(ax-b)=b-(a-ax)$;
c) $ax-(a-b)=bx-(b-a)$.

124) a) $a(x+b)=b(a-c)$; b) $a(b-x)=cx-d$;
c) $a-bx=c(x-d)$.

125) a) $ax-b(x-c)-(d-x)=0$;
b) $a(b-cx)-(dx-e)=f$;
c) $a-(bx-c)=d(e-fx)$.

126) a) $a(bx-c)-b(ax-c)-x=0$;
b) $a-b(cx-d)-a(b-cx)-dx=0$;
c) $a(b-cx)+b(ax+c)-c(a-bx)=0$.

127) a) $a(bx-c)-d(e-fx)+ac+de=0$;
b) $(a-b)(cx-d)-2bd+d(a+b)=0$;
c) $(ax-b)(c-d)-(a-cx)(b-d)+b(a+c)-d(a+b)=0$.

128) a) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$; b) $\frac{x}{a}-b=\frac{x}{c}$; c) $a-\frac{x}{b}=\frac{x}{c}$.

129) a) $\frac{x}{a}+b=\frac{x}{c}+d$; b) $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=c-d$;

c) $a-\frac{x}{b}=c-\frac{x}{d}$.

130) a) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=d$; b) $\frac{x}{a}-b+\frac{x}{c}-d=\frac{x}{e}$;

c) $a-\frac{x}{b}+c-\frac{x}{d}+e=\frac{x}{f}$.

131) a) $\frac{x}{a}+b+\frac{x}{c}+d=\frac{x}{e}+d-\frac{x}{f}+b$;

b) $\frac{x}{a}-b-\frac{x}{c}+d=\frac{x}{e}+d-\frac{x}{f}-b$;

c) $a-\frac{x}{b}+c-\frac{x}{d}=c-\frac{x}{e}+a-\frac{x}{f}$.

132) a) $\frac{a}{x}+b=\frac{c}{x}$; b) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=c$; c) $a-\frac{b}{x}-\frac{c}{x}=0$.

133) a) $\frac{a}{bx}+\frac{c}{dx}=e$; b) $x-\frac{b}{cx}=\frac{d}{ex}$; c) $\frac{a}{bx}-c+\frac{d}{ex}=0$.

134) a) $\frac{a}{bx}+\frac{c}{dx}-\frac{e}{x}=f$; b) $a-\frac{b}{cx}+\frac{d}{ex}=\frac{1}{fx}$;

c) $\frac{a}{x}+b-\frac{c}{dx}+\frac{e}{fx}=0$.

135) a) $\frac{a(b-x)}{c}+d=0$; b) $\frac{a-b(x-c)}{d}=1$;

c) $\frac{a(b-cx)}{d}+e=0$.

136) a) $\frac{a}{b(c-x)}=d$; b) $\frac{a}{b(cx-d)}-e=0$;

c) $\frac{a}{b}=\frac{c}{(dx-e)f}$.

137) a) $\frac{x-a}{b}=\frac{c(x-d)}{e}$; b) $\frac{ax-b}{c}=\frac{d(ex-f)}{g}$;

c) $\frac{a(bx-c)}{d}=\frac{e(f-gx)}{h}$.

138) a) $\frac{a}{x-b}=\frac{b}{x-a}$; b) $\frac{a}{b(x-c)}=\frac{d}{x-e}$;

c) $\frac{a}{b(c-x)}=\frac{d}{e(x-f)}$.

139) a) $\frac{a(x-b)}{c}+\frac{b(x-c)}{d}=e$;

b) $\frac{a(bx-c)}{d}-e+\frac{f(g-x)}{h}=0$;

c) $a=\frac{b(cx-d)}{e}+\frac{c(dx-e)}{f}$.

140) $7a-(5x-3a)-(2b+4a)+(3a-5b)+7ax=0$.

141) $5(x-3a+b)-2(6a-b+11x)=\frac{3a+4b-x}{2}$.

142) $(2x-5)(a+b)-4ax=7x(b-a)$.

143) a) $\frac{a-3b}{x}=\frac{a+6b}{x+5}$; b) $\frac{7a-3b}{4x-1}=\frac{a+5b}{2x+9}$.

144) $\frac{5}{x+a}-\frac{7}{3x+3a}=1{,}\dot{6}$.

145) $a\left(\frac{x}{2}-11\right)-p\left(\frac{x}{3}+11\right)=0$.

146) a) $\frac{24x^2-ax+b}{54x^2+ax+b}=\frac{4}{9}$; b) $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+c}{x+d}$.

147) a) $\frac{p}{2x}+q=\frac{q}{3x}+p$; b) $\frac{7x}{7a}+\frac{3x+11}{14a}=16$.

148) a) $\frac{5}{x-a}-\frac{5}{a-x}=\frac{15}{2}$; b) $\frac{2x-p}{q}+\frac{q-2x}{p}=\frac{p}{q}-\frac{q}{p}$.

149) $\frac{x-a}{3b}+\frac{x+3b}{5a}=\frac{4ax-4a^2}{15ab}$.

150) $\frac{a-bx}{a}+\frac{b-cx}{bc}+\frac{c-ax}{ca}=0$.

151) a) $\frac{a+4b}{2b}=\frac{x+2a}{x-4b}$; b) $\frac{a+x}{a-b}=\frac{a^2+2ax+b^2}{a^2-b^2}$.

152) a) $\frac{x-b}{1-b}-x=\frac{x-1}{1+b}$; b) $\frac{3x-2a-3b}{a}+\frac{4a-x}{3a-b}=2$.

153) $\frac{x+3a}{c+3a}+\frac{x-3a}{c-3a}=2$.

154) $\frac{x}{11}+\frac{11}{a}(11-x)-11(x-11)=1.$

155) $\frac{g^2x}{ch}-\frac{a^2}{g}-cx+\frac{kx}{h}=(a-c)x+c.$

156) $4\frac{1}{6}ab+4ac-\frac{2}{3}cx=3\frac{3}{4}ac+10ab-6cx.$

157) $(8a+3b):(2x-5)=(4a+5b):(3x+2).$

158) $\frac{3ac}{a+1}+\frac{2a+1}{a(a+1)^2.x}+\frac{a^2}{(a+1)^3}=\frac{3c}{x}+\frac{1}{ax}.$

159) $p^4+1+\frac{x+p^4}{p^4}+\frac{x-p^3}{p^3}+\frac{x+p^2}{p^2}+\frac{x-p}{p}=0.$

H. Jednadžbe s više slova.

§. 16. D.

160) Jednadžbu:

$3a+4b-(2a-b)=11a+(2b+a)$

riješi: a) po a i b) po b.

Riješi a) po p; b) po q ove jednadžbe:

161) a) $\frac{3p-q}{4}+\frac{5-q}{2}=\frac{3q+20}{8}$; b) $4-\frac{p-q}{2}=\frac{3p+a}{6}.$

162) a) $4(pq-q)=\frac{p+1}{2}$; b) $3ap+4bq=7ab-p-q.$

163) a) $a^2-1=(p+3q)(a+1)$; b) $-p=qa^2-pb^2+q.$

U jednadžbama, što dolaze, neka se izrazi y s x.

164) a) $x=\frac{4y+5}{7-y}$; b) $x=\frac{4(y+5)-20}{y-1}$; c) $x=\frac{0{\cdot}5+y}{0{\cdot}25}.$

Neka se riješe po svakom slovu, koje je u njima, ove jednadžbe:

165) a) $ab=a+b$; b) $3ab-7(a+b)+ac-bc=0.$

166) a) $x[y(z+1)+1]+1=0$; b) $\frac{3x-4y+5z}{7x-y-z}=2\frac{1}{2}.$

167) $abc+ab+ac+bc+a+b+c=1.$

I. Rješavanje rastavljanjem u faktore.

§. 16. E.

168) a) $4(x-1)=8x(x-1)$; b) $13(x-a)-9\frac{5}{11}x(x-a)=0.$

169) a) $4x^2=4x$; b) $x^2+ax=bx.$

170) a) $x(x-9)=3x(x-9)$;

b) $(x-3)(x-4)=(x-3)(2x-5).$

171) a) $\frac{x}{x+1}+\frac{5x}{2x+2}=\frac{3}{2}x$; b) $\frac{x+3}{x+1}+\frac{5(x+3)}{2(x+1)}=\frac{3}{2}(x+3).$

172) a) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{5(x-1)}{2(x+1)}=\frac{3(x-1)}{3}$;

b) $\frac{x(9x+a)}{4}=(x+3)(9x+a).$

173) $(x-5)(7x-2)(9x+1)=(3x+5)(x-5)(21x-1).$

174) $\frac{4x-1}{x-1}(x+2)-\frac{(x+2)x}{x+1}=3(x+2).$

175) $(3a-x)b(x+a-b)=4a(b+1)(x+a-b)-(x+a-b)ab.$

176) $(2x-4)x=2(x-2)(3x-8).$

177) $(x^2-1)(x+3)=2(x+1)(x-1)x.$

178) $\frac{3x-5}{3}=(x-\frac{5}{3})(4x-7).$

179) $(x+a)a(bx-c)=(ax+a^2)(b-c).$

180) a) $5(x^2-2x+1)=3x-3$; b) $x^2-9=3x(x+3)^2.$

181) a) $(9x^2-4)=15x-10$;

b) $a+b+x=a^2+2ab+b^2-x^2.$

182) $\left(\frac{x}{2}-3\right)(5x-9)=x(7x+2)-6(7x+2).$

183) $\frac{x-1}{6}=\frac{x}{6}(12x-a-b)-2x+\frac{a+b}{6}.$

184) $(x+a-3b)(5x+2)=x^2-x(3b-a).$

185) $(x-9)(5x-3a-b)=(9-x)(a+b+2x).$

K. Nejednadžbe.

Neka se riješe po x ove nejednadžbe:

186) a) $4x-7>3(x-1)$; b) $7x-9+2(x-3)<2(x+3).$

187) a) $\frac{3x-1}{5}<\frac{2(3x+1)}{11}$; b) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}>\frac{x+3}{4}.$

188) a) $\frac{4x}{9}-\frac{1}{3}<\frac{5(x+1)}{6}$; b) $\frac{9x+7}{8}-\frac{2x-1}{6}>\frac{3-x}{12}.$

189) a) $x+a<2x+b$; b) $\frac{2x+a}{3}<\frac{3x+a}{4}$;

c) $\frac{x}{x}+\frac{x}{b}<\frac{a+b}{ab}.$

190) a) $4x+5\leqq 3(x+7)$; b) $\frac{4x-5}{6}\geqq\frac{4x-5}{7}.$

§. 17. Riječima izražene jednadžbe prvoga stupnja s jednom nepoznanicom.

A. Mješovite zadaće za vježbu u sastavljanju.

I. Odmah se vidi što je nepoznanica.

§. 17. A. B. C.

1) Adiram li 12 k nekomu broju, koji mi je u misli, dobivam 49. Koji je to broj?
2) Koji broj daje, umanjen za 19, broj 17?
3) Suptrahiraš li od 63 neki broj, bit će ostatak 27. Kolik je taj broj?
4) Koji broj daje, multipliciran sa 79, produkt 4187?
5) a) Na koji broj treba 7 [91] dividirati, da izađe 56 [7]?
   b) U koji broj treba 7 [91] dividirati, da izađe 56 [7]?
6) a) Koji broj daje, dividiran **na** $2\frac{1}{4}$, za kvocijent $2\frac{2}{3}$?
   b) Koji broj daje, dividiran **u** $2\frac{1}{4}$, kvocijent $2\frac{2}{3}$?
7) Od kojega je broja deveterostruko za 2 manje nego 74?
8) Sedamnajsterostruko nekoga broja daje zajedno sa šestnajsterostrukim toga broja 2211. Koji je to broj?
9) a) Neka se nađe broj, koji ima svojstvo, da mu je peterostruko umanjeno za 4 jednako njegovomu četverostrukomu.
   b) Neka se nađe broj, koji ima svojstvo, da mu je četverostruko umanjeno za 9 jednako trostrukomu.
10) a) Kako se zove broj, iz kojega izlazi isto, ako se on multiplicira sa 4 i produkt dividira na 3, ili ako se on multiplicira s 3 i od produkta suptrahira 15?
    b) Izađe isto, ako se dvostruko nekoga broja uveća za 11, ili ako se on multiplicira s 5 i od produkta odbije 10. Koji je to broj?
11) a) Ako dividiraš dvostruko nekoga broja, uvećano za 12, na 6, izaći će sam broj. Koji je to broj?
    b) Ako dividiraš četverostruko nekoga broja, uvećano za 13, na 7, izlazi 3. Koji je to broj?
    c) Ako se dividira dvostruko nekoga broja, uvećano za 14, na 9, izlazi sam broj. Koji je to broj?
12) Dva dječaka zamisle isti broj. Pošto ga je jedan početverostručio, dobio je za 5 manje nego drugi dječak, koji je trostruko toga broja uvećao za 8. Kako se zove taj broj?
13) Kod kojega je broja svejedno, da li ga dividiraš na 2 ili da li ga umanjiš za 2?

14) Koji broj treba umanjiti za 3, da se dobije njegova četvrt?
15) Koji je broj za svoju dvanajstinu manji od 91?
16) Koji je razlomak za a manji od svoga a-toga dijela?
17) Koji broj ima svojstvo da izađe za 5 više, ako ga multipliciraš s $\frac{3}{4}$, nego ako ga multipliciraš s $\frac{2}{3}$?
18) Na prijamnom ispitu ocijenjena je svaka radnja, u kojoj je bilo najviše 6 pogrješaka, sa „dobro“. Jedan od ispitanika reče: Da je u mojoj radnji bila polovina pogrješaka, pa da je učitelj onda pregledao jednu pogrješku, baš bi još bio dobio „dobro“. Koliko je bilo pogrješaka u toj radnji?
19) Trgovac proda od svoje zalihe kave 5 *kg*, pa dobije za ostatak, koji je prodavao po 2 *K*, toliko, kao da je čitavu zalihu prodavao po 1·50 *K*. Koliko je *kg* kave bilo na početku u zalihi?
20) Ivan i Đuro dobili su za božić od svojih roditelja darove jednake vrijednosti i to: Ivan 24 pisanke i jednu čitanku, koja je stajala 3 *K*, a Đuro 20 pisanaka i jedan atlas vrijedan 4 *K*. Pošto je bila svaka pisanka?
21) U kuhinji treba da ogule dvije služavke 600 krumpira. Jedna oguli u svakoj minuti 3 krumpira, a druga dva, no druga radi $1\frac{1}{4}$ sata duže nego prva. Koliko je vremena radila prva?
22) Otac od 53 godine ima sina od 17 godina. a) Nakon koliko će godina biti otac tri puta tako star kao sin? b) Prije koliko je godina bio otac deset puta tako star kao sin?
23) Perzijska vojska, što su ju kod Maratona potukli združeni Atenjani i Platejci, bila je jedanajst puta tako velika kao grčka vojska, a ipak još uvijek za deseterostruko grčke vojske manja od čitave perzijske vojske, u kojoj je bilo 210000 momaka. Koliko je bilo momaka u grčkoj vojsci, koja se je borila kod Maratona?
24) Ako dividiraš neki broj na 5 i od razlomka, koji je tim postao, suptrahiraš drugi razlomak, kojemu je brojnik za 2, a nazivnik za 3 manji od brojnika i nazivnika prvoga razlomka, dobit ćeš šesti dio prvoga razlomka. Koji je to broj?
25) a) Neki broj treba rastaviti na 3 sumanda tako, da je prvi sumand za 15 manji od polovine broja, drugi za 5 manji od trećine broja, a treći za 4 veći od četvrti broja. Odredi taj broj i sva tri sumanda.
    b) Neki je broj rastavljen na dva sumanda, od kojih je prvi za 3 veći od polovine broja, a drugi za 2 veći od četvrti broja. Kako se zove taj broj? Kako se zovu sumandi?

26) a) Za koji broj treba da umanjiš brojnik i nazivnik razlomka $\frac{5}{8}$, da dobiješ razlomak jednak $\frac{1}{2}$?

b) Za koji broj treba umanjiti brojnik i nazivnik razlomka $\frac{43}{71}$, da bude vrijednost novoga razlomka $\frac{1}{2}$?

27) Stup stoji s trećinom svoje dužine u vodi, s polovicom svoje dužine u zemlji i viri onda još uvijek 15 *m* 10 *cm* iz vode. Kako je dugačak cijeli stup?

28) Razlomak ima nazivnik 12. Ako se od njega suptrahira razlomak, komu je brojnik i nazivnik svaki za 3 manji od brojnika i nazivnika prvoga razlomka, izlazi diferencija $\frac{1}{36}$. Što je brojnik prvoga razlomka?

II. Izbor nepoznanice ne izlazi neposredno iz pitanja.

29) a) Netko ima u desnom džepu četiri puta toliko novaca kao u lijevom. Kada je pako šest kruna izvadio iz desnoga džepa i metnuo u lijevi, opazio je, da ima u oba džepa jednako. Koliko je imao kruna u svemu uza se?

b) Netko ima u desnom džepu tri puta toliko kruna kao u lijevom. Kad je pako 17 kruna premetnuo iz desnoga džepa u lijevi, imao je u lijevom džepu šest puta toliko novaca kao u desnom. Koliko je novaca imao na početku u lijevom džepu?

30) Igrač dobije s početka petinu svoga uloška, izgubi zatim od uloška zajedno s gubitkom šestinu; od ostatka izgubi opet četvrt, ali dobije iza toga sedminu svoje sadanje gotovine. Kad je onda opet suviše riskirao, pa poradi toga izgubio $\frac{5}{6}$ ostatka i vidio da ima samo još jednu jedinu krunu, prestao je igrati. Koliko je bio izgubio?

31) Netko dade kod igre sav svoj novac za uložak. On dobije onda trećinu. Poslije toga izgubi od uloška zajedno s dobitkom četvrtinu, a onda od svoje sadanje gotovine polovinu. Budući da je sada još imao samo 9 kruna, prestao je igrati. Koliko je kruna imao na početku sa sobom?

32) Kod užega izbora dobio je izabrani tri glasa više od polovine predanih glasova; neizabrani pako dva glasa više od trećine svih predanih glasova. Koliko je glasova bilo predano?

33) Neka škola je imala 19 puta toliko domaćih učenika koliko stranih. Kad je pako bilo primljeno još 5 stranih, a izostalo 5 domaćih učenika, bilo je samo 15 puta toliko domaćih koliko

stranih, makar da je ukupni broj učenika ostao isti. Kolik je bio taj ukupni broj?

34) Trgovac s vinom hoće da proda tri bačve vina, koje imaju zajedno 1400 *l* i računa litar po 1·50 *K*. Kad bi pretočio sadržaj najveće bačve u srednju, ostalo bi mu u najvećoj bačvi još 100 *l*. Srednja bačva drži 50 *l* više od najmanje. Po što je sadržina svake bačve?

35) *A, B, C, D* imaju skupa 122 *K* 21 *f*. *A* ima baš toliko komada filira, koliko *B* ima komada po 10 filira, koliko i *C* ima po 1 krunu i koliko ih ima *D* po 10 kruna. Koliko ima svaki?

36) U tvrđavi je posada od 3520 momaka; među njima je tri puta toliko topdžija, koliko konjanika, i četiri puta toliko pješaka, koliko topdžija. Koliko je momaka od svake vrste u tvrđavi?

37) Površina se zemlje dijeli na 5 pojasa: jedan vrući, dva umjerena i dva hladna; svaki umjereni ima $\frac{15}{24}$ vrućega, svaki hladni $\frac{7}{44}$ jednoga umjerenoga. Kolika je pljoština svakoga pojasa, ako je oplošje čitave zemaljske kugle 9261238 kvadratnih milja?

38) U Petrogradu je usred zime noć za 13 sati duža od dana. Koliko sati ima dan, a koliko noć? U koliko sati izlazi, u koliko sati zalazi sunce?

39) Na Spitzbergenu (77° sjev. širine) ne izlazi u opće sunce neko određeno vrijeme u zimi, a isto tako dugo ljeti u opće ni ne zalazi. Vrijeme, u kojemu se ponavlja svaka 24 sata izmjena dana i noći, je za $1\frac{1}{2}$ mjeseca duže od vremena trajne noći. Koliko mjeseci ima po tom trajna noć?

40) „Najbolji urokaze, kolikô dâna već minu?“ —
„„Dva put trećine dvije od onog, što prošlo je, još su““.*

41) Erosa neveselog zapíta Kiprida jednoć:
„Kakva te spopala žalost, o sinko?“ A on joj reče:
„Pijerske Muze, koja odáklê, jabuke meni
Oteše iz njedara, što nošah ih baš s Helikóna.
Petinu jabuka Klija, dvanàjstinu uze Eutèrpa,
A dvadesètinu uze Melpòmena, osminu od njih
Talija uze božànskâ, Terpsihora ôdnese četvrt,
Erata sedmi dio, Polimnija ugrabi meni
Trideset jabuka mojih, Uranija dvadeset i k tom

* Iz radnje: „Arithmetische Epigramme der griechischen Anthologie von Zirkel.“ (Program gimnazije u Bonnu od g. 1853.)
Zadaće 40., 41., 42. i 43. preveo je iz grčkoga g. dr. T. Maretić

Stotinu ugrabi još, Kaliopa napuni njedra
S tri sta jabuka mojih i tako ode od mene.
Sada dolazim k tebi sa praznijim rukama, jer mi
Boginje ostaviše pedeset jabuka samo".*

42) O Pitàgora sretni, helikonskîh potomče Muza,
Reci mi, kada te pitam: kolikô se u kući tvojoj
Ljudi oko mudrînê i natječe i trûdî vrlo. —
To ću, Polikrate, reći ti sad: matemàtiku krasnu
Uči polovina njih, četvrtina od njih se trudi
Besmrtnu prirodu učeć, a sedmini samo je briga,
Kako će šutjet i čuvat u sèbi besjede vječne;
K tome još žene su tri, Teána je med njima prva;
Tòliko našljedovača imadem pijerskih Muza.*

43) Ovaj Diòfanta pokriva grob, — o veliko čudo!
Spomenik kazuje sam, kòliko življaše on.
Bog mu šestinu dade života u djetinjstvu živjet,
A dvanaèstinu dâ maljava lica mu bit.
Za tim mu sedminu doda i zapali vjenčani luč mu,
A iza godina pet dâ mu, te rodi se sin.
Jao ljubljeno čedo, al' jadno! kada života
Očeva navrši pô, uze ga strahotni Ad.
Četiri ljeta izà tog u tuzi se tješeći svojoj
Mudrošću napokon kraj dođe života mu tad.*

44) Gospodar najmi radnika na 30 dana s ugovorom, da će mu za svaki dan, koji radi, platiti 1 *K* 40 *fil.* a za svaki dan, koji ne radi, odbiti 1 *K*. Nakon 30 dana se nađe, da radnik dobije samo 1 K 20 f. Koliko je dana radio?**

45) Gospodin je najmio slugu za 120 K na godinu i obećao mu uz to još jedno novo odijelo. Poslije sedam mjeseci otišao je sluga i dobio je samo 40 K, budući da je već primio bio odijelo. Po što je bilo odijelo?**

46) Dva su tornja u ravnini daleko jedan od drugoga 60 metara, jedan je visok 50, a drugi 40 metara. Među njima stoji bunar jednako udaljen od vrhova tornja. Kolika je daljina bunara od svakoga tornja?**

47) Zec je 90 skokova ispred psa i koliko god puta zec načini 12 skokova, toliko puta načini pas 15 skokova. Ako je jedan skok zeca tako velik, kao jedan skok psa, koliko skokova mora da još učini pas, da stigne zeca?**

** Ove zadaće dolaze već u knjizi: Die Coss des Christoff Rudolf. Die schönen Exempeln der Coss durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt. Zu Königsberg in Preussen, 1553. Rudolf se je rodio god. 1499. u Jaueru u Šleskoj i izdao je god. 1520. svoju knjigu.

48) Otac ostavi svojim sinovima i kćerima dvije kuće. Sinova je bilo tri više nego kćeri. Bolja je kuća bila procijenjena na 13500 K i predana sinovima, a druga kuća, procijenjena na 6000 K zapala je kćeri, pa se je pokazalo, da su po tri kćeri dobile toliko, koliko po dva sina. Koliko je sinova, a koliko kćeri ostalo iza oca?***

49) U središtu jezera, koje je 10 stopa dugo i 10 stopa široko, raste trstika, koja se uzdiže jednu stopu nad površinu jezera. Ako se povuče na obalu k sredini jedne strane, dosiže samo do površine jezera. Kako je duboka voda?***

50) Ako je kod otvaranja dvokrilnih vrata unutarnji rub krila jednu stopu daleko od vratnica, onda je otvoreni prostor između krila 2 palca; kako je široko jedno krilo vrata? (Kinezi su dijelili stopu na 10 palaca.)***

51) Bambus visok 10 stopa prelomljen je na gornjoj strani. Ako se gornji kraj dotiče tla, udaljen je tri stope od donjega kraja. Kako je visok bambus do mjesta, gdje je prelomljen?**

B Jednostavne primjene jednadžbi u prirodnoj nauci i geometriji.

1. Mehanika.

52) a) Kolika je apsolutna težina kocke od slonove kosti, kojoj je specifična težina 1·9, ako je stranica te kocke dugačka 3 cm?
b) Kolika je apsolutna težina olovne kocke (spec. težina = 11·4), ako je stranica 5 cm duga?

53) a) U posudi, koja ima za osnovku pravokutnik i strane okomite na osnovki, ima žive (specifična težina = 13·6) do visine od 5 cm. Koliko važe ta živa, ako je osnovka 5 cm široka i 8 cm dugačka?
b) Ako je u takovoj posudi do visine od 10 cm petroleja (spec. težina = 0·89), a osnovka posude ima stranice 12 cm i 15 cm, kolika je apsolutna težina petroleja?

54) Koliko važe uzduh, što ga istisne balon s obujmom od 23190 litara (spec. težina uzduha = $\frac{1}{773}$)?

*** Ove su zadaće iz knjige „Kiu-tschang", stare kinezke aritmetike, koja da je već god. 2600. prije Kr. sastavljena. Isporedi o aritmetici Kineza: Biernatzky u Crelleovu časopisu, sv. 52.

55) a) Željezna kugla važe 3·8 kg i ima obujam od 0·5 dm^3; kolika je specifična težina željeza?
b) 7 litara alkohola važe 5·6 kg; kolika mu je specifična težina?
c) Balon od 2·4 litre obujma važe prazan 35 g, a pun rasvjetnoga plina 36·452 g; kolika je specifična težina rasvjetnoga plina?

56) a) Kolik obujam zapremaju 300 g. pluta (specifična težina = 0·24)?
b) Kolika mora da bude posuda, u kojoj će se držati 11·7 kg petroleja (spec. težina = 0·9)?
c) Kolik prostor zaprema 10 kg uzduha (spec. težina = $\frac{1}{773}$)?

57) a) Zvuk prevali u sekundi 332 *m*; kako je dalek oblak, ako se grom čuje 5 sekunda kasnije, nego što se je vidila strijela?
b) Ako vihor puše s brzinom od 20 m, kolik put prevali čestica uzduha za 2 sata?

58) a) Pješak prevali geografsku milju za 1 sat 32 minuta 45 sekunda; kolika mu je brzina?
b) Željeznica od Zagreba do Rijeke duga je 229 km; ako brzi vlak treba 5 sati 27 minuta, kolika je njegova srednja brzina?
c) Kolika je srednja brzina parobroda, koji put od Bremerhavena do Newyorka, koji se računa na 3600 morskih milja, prevali za 8 dana 55 minuta?

59) a) Željeznica od Zagreba do Broda je 208 km dugačka; koliko vremena treba osobni vlak s brzinom od $9\frac{1}{2}$ m za taj put?
b) Morski put od Rijeke do Kotora je 376 morskih milja; za koliko će vremena prevaliti taj put brzi parobrod ugarsko-hrvatskoga parobrodarskoga društva, ako mu je srednja brzina 5·5 uzlova (zajedno sa stajanjem na postajama)?*
c) Koliko vremena treba svjetlost, da kraj brzine od 298.000 km dođe od najbliže nekretnice (α Centauri) do zemlje t. j. da prevali put, koji je 298000 puta tako dugačak, kao što srednja daljina sunca od zemlje, koja je 149500000 *km*?

60) Iz mjesta *A* odlazi brzi vlak sa srednjom brzinom od 22 m u mjesto *B* i u isto doba iz mjesta *B* u mjesto *A* osobni vlak sa srednjom brzinom od 14 m. Oba se vlaka sastanu nakon $4^h\ 32^m\ 5^s$; kolika je daljina između mjesta *A* i *B*?

* U pomorstvu se računaju daljine na morske milje (1 milja = 1852 m.), a brzina na uzlove. Kod vožnje od 15 uzlova prevali brod 15 morskih milja za 1 sat.

61) Iz Zagreba kreće jedan osobni vlak u $9^h\ 51^m$ u jutro na Rijeku sa srednjom brzinom od 7·9 m. U $7^h\ 20^m$ u jutro ide jedan brzi vlak iz Rijeke u Zagreb sa srednjom brzinom od 11·7 m. Ako se oba vlaka sastanu u $11^h\ 35^m\ 35^s$, kako je duga željeznička pruga između Zagreba i Rijeke?

62) Morski put od Newyorka do Bremenhavena računa se na 3600 morskih milja. Iz prvoga mjesta otiđe brzi parobrod u drugo i baš dva dana poslije tòga ode parobrod s brzinom manjom za 5 uzlova iz druge luke u prvu. Oba se parobroda sastanu $2^d\ 15^h$ poslije odlaska drugoga parobroda; koliko morskih milja prevali brzi parobrod za jedan sat?

63) U 9 sati odlazi osobni vlak iz jedne stanice, a u 10 sati u istom smjeru brzi vlak s brzinom većom za 5 m. Ovaj stigne osobni vlak u 12^h; kolika je brzina osobnoga vlaka?

64) Put od Southamptona u Kapstadt računaju na 6000 morskih milja. Iz obiju luka otplove u isto doba parobrodi nasusret, jedan s brzinom od 20 uzlova, drugi s brzinom od 10 uzlova. Nakon kolikoga će se vremena sastati oba parobroda?

65) Željeznica iz Zagreba preko Broda u Zemun dugačka je 434 km. Kad bi brzi vlak s brzinom od 12 m odlazio iz Zagreba u 1^h po podne, a u 6^h po podne osobni vlak s brzinom od 7 m iz Zemuna, kada bi se ovi vlakovi sastali?

66) Iz Rijeke otplovi dne 1. srpnja u 6^h u jutro parobrod s brzinom od 6 uzlova. Za njim pođe dne 6. srpnja u 6^h u jutro drugi parobrod s brzinom od 22 uzla. Kad će drugi parobrod stići prvi?

67) U rijeci, kojoj je brzina 2[1·5] m, prevali parobrod niz vodu 18[19·8] km; s kolikom bi brzinom brod išao u mirnoj vodi?

68) Kolika je brzina rijeke, ako čamac, koji bi u mirnoj vodi veslanjem dobio brzinu 2·2 m, uz vodu za 2 sata prevali 1·44 km?

69) Na dnu je rijeke tovar od 1500 kg, koji zaprema obujam od 200 dm^3; kolika treba sila, da se digne tovar u vodi?

70) Austro-ugarska srebrna forinta važe u uzduhu 12·22 g, u vodi 11·04 g. Kolik joj je obujam?

71) Šuplja staklena kugla, koja u uzduhu važe 3·6 g, lebdi u alkoholu od specifične težine 0·8; kolik je obujam te kugle?

72) Koliko grama olova od specifične težine 10·88 treba objesiti na 6·24 g pluta, da pluto, kojemu je specifična težina 0·24 lebdi u vodi?

73) U pasatnom kraju atlantskoga oceana istisne brod težak 411

bačava, 400 m^3 morske vode; kolika je specifična težina te morske vode?

74) U sjevernom ledenom moru je specifična težina vode 1·025. Za koliko će kubičnih metara ovdje brod manje istisnuti vode, nego u čistoj slatkoj vodi?

75) Kolika je težina broda, koji u pojasu kalma (tišinâ), gdje je specifična težina morske vode 1 026, istisne 5000 m^3 vode?

76) Oplošje je zemaljske kugle od prilike 510 milijuna kvadratnih kilometara; kolika je težina naše čitave atmosfere, ako je njezin tlak na 1 cm^2 jednak 1·033 kg?

77) Kako bi visoka bila atmosfera, da joj je svagdje gustoća jednaka gustoći na površini zemlje t. j. da joj je specifična težina sve do najviše vrste jednaka 0·001293?

78) Kako bi visok stup petroleja, kojemu je specifična težina 0·89, držao ravnotežje tlaku uzduha?

2. Toplina.

79) a) Koliko je stupanja po Réaumuru (R) i po Fahrenheitu (F) 15° [25°] po Celsiju?
b) Koliko je stupanja po Réaumuru i Celsiju 68° [86°] Fahrenheita?

80) a) Koliko je stupanja Celsija i Fahrenheita — 8° [— 4°] Réaumura?
b) Koliko je stupanja Celsija i Réaumura + 5° [+ 9·5°] Fahrenheita?

81) a) Koliko je stupanja Réaumura i Fahrenheita — 20° [— 30°] Celsija?
b) Koliko je stupanja po Celsiju i Réaumuru — 13° [— 31°] Fahrenheita?

82) Mjeden štap, kojemu je koeficient rastezanja 0·000019, ima kod 0° dužinu od 2 m. Kako je dugačak kod 50°?

83) Željeznička šinja, kojoj je koeficient rastezanja 0·000012, ima kod 25° dužinu od 5·0015 m; kako je dugačka kod 0°?

84) Komad olova zaprema kod 0° prostor od 5 dm^3; kod koje će temperature zapremiti 5·0105 dm^3, ako linearni koeficient rastezanja 0·000028?

85) Srebrna kugla ima kod 0° obujam od 10 cm^3; ako se ugrije na 100° uveća joj se obujam za 0·057 cm^3. Kolik je prema tomu linearni koeficient rastezanja u srebra?

86) Obujam je uzduha, kojemu je koeficient rastezanja $\frac{1}{273}$, kod 0° jednak 54·6 m^3; kolik je kod 100°?

87) Neka količina uzduha ima kod 136·5° obujam od 15 m^3; kolik mu je obujam kod 0°, ako je koeficient rastezanja $\frac{1}{273}$?

3. Geometrija.

88) Jedan je od dva sukuta $1\frac{1}{2}$ puta tako velik kao drugi. Kolik je taj drugi kut?

89) Jedan je od dva sukuta osmi dio drugoga. Traži se drugi kut.

90) Izvanji je kut u trokutu 147°[158°24′]; jedan od dva unutrašnja kuta, koji su mu nasusret, je $2\frac{1}{2}$[1·4] puta tako velik, kao drugi. Kolik je drugi kut?

91) U trokutu ABC je $\sphericalangle A = 5°[7°]$; $\sphericalangle B$ je 9[11] puta tako velik kao A i C zajedno. Traži se $\sphericalangle C$.

92) U trokutu ABC je $\sphericalangle A$ 5[$3\frac{1}{2}$] puta i $\sphericalangle B$ 10[$1\frac{3}{4}$] puta tako velik kao $\sphericalangle C$. Kolik je $\sphericalangle C$?

93) U trokutu ABC je $\sphericalangle A$ 7[$2\frac{1}{2}$] tako velik kao $\sphericalangle C$; $\sphericalangle B$ je 3[$1\frac{1}{4}$] puta tako velik kao A i C zajedno. Traži se $\sphericalangle C$.

94) U četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle A = 40°[10°]$; $\sphericalangle B$ je 4[$2\frac{1}{2}$] puta a $\sphericalangle C$ 5[$3\frac{1}{2}$] puta tako velik kao $\sphericalangle D$. Kolik je $\sphericalangle D$?

95) U četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle A$ 72°[15°); $\sphericalangle B$ je 2[4] puta tako velik kao $\sphericalangle D$, a $\sphericalangle C$ je 3[5] puta tako velik, kao A i B zajedno. Traži se $\sphericalangle D$.

96) U četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle A$ 4[6] puta tako velik kao $\sphericalangle D$; $\sphericalangle B$ je 3[5] puta tako velik kao $\sphericalangle D$, a $\sphericalangle C$ je 2[4] puta tako velik kao A i B zajedno. Traži se $\sphericalangle D$.

97) Dužina je katete u pravokutnom trokutu 60 cm [1·19 m], hipotenuza je za 50 cm [0·49 m] veća od druge katete. Kolika je ta kateta?

98) U krugu je povučena tetiva dugačka 8·8 m [3·04 m]; daljina je tetive za 0·8 m [0·32 m] manja od polumjera kruga. Kolik je taj polumjer?

99) Neka se konstruira istokračan trokut s osnovkom od 33·6 m [$5\frac{1}{2}$ m], u kojem je krak za 9·8 m [1·21 m] veći od visine na osnovku. Kolika treba da bude visina?

100) U pravokutniku s dužinom od 13·2 m [3·1 m] je diagonala za 7·2 m [$\frac{1}{4}$ m] veća od širine. Kolika je ta širina?

101) U mnogokutu je broj stranica za 3[5], a broj svih mogućih diagonala za 36[45] veći, nego u drugom mnogokutu. Koliko stranica ima taj drugi mnogokut?

§. 17a. Zadaće za ponavljanje iz fizike i geometrije.

A. Zadaće iz fizike.

1) Na svakoj strani koloture na Atwoodovom stroju za padanje visi $P = 100$ g, utjecaj koloture vrijedi $P_1 = 35$ g; kolika mora da bude pretega p, ako treba da bude akceleracija $a = 0{\cdot}4$ m?
2) Kolikom brzinom c treba vertikalno u vis ispaliti kuglu, koja je nakon $t = 3$ sekunde u visini od $s = 1425{\cdot}9$ m?
3) Nakon koliko će sekunda imati tijelo bačeno s brzinom od 245 m vertikalno u vis brzinu od 147 m?
4) Kugla ispaljena pod kutom elevacije $\alpha = 60^0$ je nakon dvije sekunde u daljini $d = 500$ m od ishodišta; kolikom je brzinom ispaljena?
5) Kolikom brzinom treba ispaliti kuglu pod kutom elevacije od 30^0, ako treba da nakon 3 sekunde dosegne do visine $h = 690{\cdot}9$ m?
6) Vaga ima krakove dugačke $l = 16$ cm i teške $q = 48$ g, a težište joj je $d = 3$ cm ispod potporništa. Koja će pretega p dati otklon od 45^0?
7) Koliku težinu treba da imaju kraci vage, dugački 28 cm, ako pretega od 6 g izvodi otklon od 45^0, a težište je 4 cm ispod potporništa?
8) Neelastična kugla teška $p_1 = 5$ kg ima brzinu $v_1 = 39$ m, pa udari o drugu neelastičnu kuglu tešku $p_2 = 8$ kg, koja se giba istim smjerom; kolika je brzina v_2 druge kugle, ako je zajednička brzina poslije sraza $c = 31$ m?
9) Neelastična kugla teška 6 kg ima brzinu od 16 m i udari o drugu neelastičnu kuglu, koja joj leti nasusret s brzinom od 64 m; kolika je težina druge kugle, ako je poslije sraza zajednička brzina u smjeru druge kugle 4 m?
10) Elastična kugla teška $p_2 = 4$ kg ima brzinu od 15 m i udari o drugu elastičnu kuglu tešku $p_1 = 6$ kg, koja se giba istim smjerom. Kolika joj je brzina v_1 prije sraza, ako je poslije sraza $c_1 = 14$ m?
11) Elastična kugla teška $p_2 = 15$ kg ima brzinu $v_2 = 95$ m i udari o drugu elastičnu kuglu, koja joj leti nasusret s brzinom $v_1 = 19$ m; kolika joj je težina p_1, ako se poslije sraza natrag giba s brzinom od $c_1 = 161$ m?
12) Neelastična kugla teška $p_1 = 4$ kg ima brzinu $v_1 = 9$ m i udari o drugu neelastičnu kuglu, kojase s brzinom $v_2 = 2$ m giba istim smjerom; kolika joj je težina p_2, ako je gubitak energije gibanja kod sraza $u = 6$ mkg?
13) Na kosini s naklonom $\alpha = 13^0\,50'$ i koeficientom trenja $d = 0{\cdot}2$ djeluje sila $P = 898$ kg i ne da tijelu da se giba niz kosinu; kolika je težina Q toga tijela?
14) Teretu od 50000 kg na kosini s naklonom od $18^0\,30'$ ne da, da se skliže niz kosinu sila od 4011 kg; kolik je koeficient trenja?
15) Kolik se teret Q može silom $P = 11291$ kg na kosini s naklonom $u = 19^0\,30'$ gore vući, ako je koeficient trenja $d = 0{\cdot}125$?

---

16) 12 g pluta svezano sa 114 g olova od specifične težine 11·4 izgube u vodi 60 g od težine; kolika je specifična težina pluta?
17) Koliko grama cinka od specifične težine 7·2 treba svezati s 21 g hrastovine, da ta sveza izgubi u vodi 35 g od svoje težine, ako je specifična težina hrastovine $= 0{\cdot}7$?
18) U kojem vremenu t ističe iz okrugloga otvora v s polumjerom od 1 cm 40·92 kg vode, ako se računa stezanje traka 0·62 i ako je površina neprekidno $h = 0{\cdot}625$ m. iznad središta kruga?
19) Iz okruglog otvora s premjerom od 2·5 cm, kojega je središte 2·5 m ispod površine isteče u 16 minuta 8316 kg; koliko je stezanje traka?
20) Cilindrička se cijev s polumjerom r cm svršava u kuglu s polumjerom R cm. Kugla i dio cijevi napunjeni su vodom, koja prenosi tlak od p kg, što ga izvodi čep u cijevi, na kuglu i djeluje na njezinu čvrstu stijenu tlakom od P kg.
a) $r = 0{\cdot}9$, $p = 5$ i $R = 4{\cdot}1$; kolik je P?
b) $r = 1{\cdot}4$, $R = 5$ i $P = 100$; kolik je p?
21) Na podnožju brijega visokoga $v = 1931{\cdot}16$ m je tlak uzduha $b_x = 777{\cdot}4$ mm, a temperatura $t_x = 22{\cdot}3^0$. Na vrhu je tlak uzduha $b_y = 617{\cdot}5$ mm; kolika je temperatura na vrhu, ako je koeficient za rastezanje uzduha $\alpha = \frac{1}{2\,7\,3}$?
22) U balonu je u visini od 6023·38 m tlak uzduha 382·9 mm, a temperatura 18^0, dočim je na površini zemlje temperatura 32^0; kolik mora da je tlak uzduha na zemlji, ako se računa koeficient rastezanja uzduha na $\frac{1}{3\,0\,0\,0}$?
23) Na nekom je mjestu uz temperaturu uzduha od $20{\cdot}3^0$ vrelište

vode kod 99°; gdje je vrelište vode na mjestu višemu za 1839·2 m, ako je tamo temperatura uzduha 7°?

24) Obujam v recipienta na uzdušnoj sisaljci je 75 cm³, rastanjenje je uzduha nakon $n = 10$ dizanja čepa 0·000005905; kolik je obujam čižme R (bez obzira na štetni prostor)?

25) Okrugli je balon napunjen vodikom od specifične težine $s = 0{\cdot}0724$. Teret je u njemu $P = 28\frac{4}{7}$ kg; kolik mu je polumjer r, ako je sila dizanja $S = 600$ kg (kod 0° i 760 mm uzdušnoga tlaka)?

26) Okrugli balon s polumjerom od 21 dm ima teret od 9·404 kg; kolika mora da bude specifična težina rasvjetnoga plina u balonu, ako treba da mu bude snaga dizanja 10 kg? (0° i 760 mm).

Bilješka. Litar uzduha važe $_7\frac{1}{7\,7\,3}$ kg.

27) Za visinu h, do koje se može dići balon, izračunalo se je 5536 54376 m; kolik mu je obujam v, ako je u njemu teret $P = 186{\cdot}1$ kg, a specifična težina vodika, kojim je napunjen, 0·0695? (Temperatura 0°. Specifična težina uzduha kod 760 mm tlaka $= \frac{1}{7\,7\,3}$).

---

28) Po Helmholtzu čini najviši ton, koji se može u muzici upotrijebiti, $n = 4000$ titraja u sekundi; kolikim utegom p treba napeti žicu dugu $l = 0{\cdot}125$ m, ako je komad od 1 m dužine težak $k = 9{\cdot}8$ g?

29) Dio žice na guslama, koji titra, neka bude dugačak 0·5 m; koliko treba da važe komad od 1 m dužine najdublje žice (g sa 198 titraja u sekundi), ako je napetost njezina 98·01 kg?

30) Kako dugačka mora da bude žica, koja će 1400 titraja učiniti u sekundi, ako je napetost 1000 kg i komad dugačak 1 m važe 5 g?

31) Koliku specifičnu težinu mora imati žica s prorezom od 1 mm² i dužinom od 0·4 m, ako treba, da uz napetost od 8 kg načini u sekundi 350 titraja?

---

32) Svijetla je točka u osovini sferičkoga ugnutoga zrcala 6 cm daleko od zrcala, kojemu je žarišna daljina 5 cm; u kojoj je daljíni slika?

33) Polumjer je sferičkoga ugnutoga zrcala 18 cm, daljina slike u osovini 10 cm; gdje je svijetla točka?

34) Od svijetle točke, koja je u osovini 240 cm daleko od sferičkoga ugnutoga zrcala postaje slika u daljini od 16 cm; kolika je žarišna daljina zrcala?

35) 6 cm daleko od sferičkoga ugnutoga zrcala je predmet visok 10 cm; kako je visoka njegova slika, ako je polumjer zrcala 8 cm?

36) Slika je predmeta, koji je 22 cm daleko od sferičkoga ugnutoga zrcala, kojemu je žarišna daljina 18 cm, za 7 cm viša od predmeta; kako je visok predmet?

37) U sferičkoj leći sabirači je d daljina svijetle točke; b daljina slike, n kvocijent lomljenja za staklo i uzduh, r_1 i r_2 su polumjeri obiju kugala i f je žarišna daljina.

a) Kolik je u bikonveksnoj leći b, ako je $d = 12$ cm i $f = 4$ cm?

b) Kolik je d, ako je $b = 14$ cm i $f = 10$ cm?

c) Kolik je f, ako je $d = 21$ cm i $b = 42$ cm?

d) Kolik je n, ako je $d = 8$ cm, $b = 24$ cm, $r_1 = 4$ cm i $r_2 = 12$ cm?

e) Kolik je r_1, ako je $d = 15$ cm, $b = 30$ cm, $n = \frac{3}{2}$ i $r_2 = 20$ cm?

38) a) Kolika je veličina B slike u leći sabirači, ako je $d = 18$ cm, veličina predmeta $A = 13$ cm i $f = 12$ cm?

b) Kolik je A, ako je $d = 10$ cm, $B = 28$ cm i $f = 8$ cm?

39) a) Kolik je u leće sabirače r_2, ako je $r_1 = 6$ cm, $d = 15$ cm, $b = 60$ cm i $n = \frac{3}{2}$?

b) Na plankonveksnoj leći je $r = 10{\cdot}5$ cm, $d = 28$ cm, $n = \frac{3}{2}$, kolik je b?

c) Na konkavkonveksnoj leći je $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 12$ cm, $n = \frac{3}{2}$ i $b = 360$ cm, kolik je d?

40) a) Kolik je u bikonkavnoj leći b, ako je $f = 18$ cm i $d = 63$ cm?

b) Kolik je n, ako je $d = 126$ cm, $b = 18$ cm, $r_1 = 14$ cm i $r_2 = 42$ cm?

41) a) Kolik je na plankonkavnoj leći r, ako je $d = 99$ cm, $b = 18$ cm i $n = \frac{3}{2}$?

b) Kolik je eksponent lomljenja kod konvekskonkavne leće, ako je r_1 (konkavna strana) = 14 cm, r_2 (konveksna strana) = 42 cm, $d = 210$ cm i $b = 35$ cm?

c) Kolik je kod konvekskonkavne leće polumjer konkavne strane, ako je onaj konveksne 24 cm, $d = 112$ cm, $b = 14$ cm i $n = \frac{3}{2}$?

42) a) Kolika treba da bude žarišna daljina naočari za dalekovidno oko, kojemu je daljina jasnoga vida 32 cm, da najbolje vidi predmet, koji je u normalnoj daljini vida (t. j. 24 cm) od oka?

b) Kolika je daljina jasnoga vida u dalekovidnoga čovjeka, koji vidi predmet namješten u normalnoj daljini vida najbolje kroz naočari od 60 cm žarišne daljine?

43) a) Kolika treba da bude žarišna daljina naočari za kratkovidno oko, kojemu je daljina jasnoga vida 18 cm, da najbolje vidi predmet namješten u normalnoj daljini vida?

b) Kolika je daljina jasnoga vida u kratkovidnoga čovjeka, koji vidi predmet namješten u normalnoj daljini vida najbolje kroz naočari od 24 cm žarišne daljine?

44) a) Koliko puta povećava jednostavni mikroskop (lupa) od 4 cm žarišne daljine za oko, kojemu je daljina jasnoga vida: α) 24 cm (normalno) i β) 30 cm (dalekovidno)?

b) Kolika treba da bude žarišna daljina lupe, da dade 8-struko povećanje nekomu, koji ima 18 cm za jasnu daljinu vida?

45) a) Sastavljen mikroskop ima žarišnu daljinu objektiva 4 mm, okulara 80 mm, daljinu objekta od objektiva 6 mm; kolika se mora načiniti daljina između objektiva i okulara, ako je daljina jasnoga vida u motritelja 240 mm?

b) Žarišna je daljina objektiva 6 mm, okulara 50 mm, daljina objektiva i okulara 64 mm; u koju daljinu od objektiva treba smjestiti objekat za oko, kojemu je daljina jasnoga vida 200 mm?

46) a) Koliko je linearno povećanje mikroskopa, koji daje za jasnu daljinu vida od 300 mm kraj žarišne daljine objektiva od 10 mm i okulara od 150 mm točnu sliku, ako je objektiv udaljen od objekta 12 mm?

b) Da se dobije za daljinu jasnoga vida od 360 cm točna slika u mikroskopu, kojemu je žarišna daljina objektiva 10 mm, a okulara 120 mm, treba predmet namjestiti 15 mm daleko od objektiva; za koliko treba umanjiti ovu daljinu, da (kraj jednake daljine okulara od objektiva) i oko od 240 mm jasne daljine vida dobije jasnu sliku predmeta?

47) U Keplerovu je durbinu okular s daljinom žarišta od 16 mm i objektiv s daljinom žarišta od 400 mm; kolika se mora načiniti daljina između okulara i objektiva, da predmet udaljen 1600·4 m jasno vidi oko, koje ima daljinu jasnoga vida od 240 mm?

48) Kako je daleko od objektiva Keplerova durbina predmet, koji jasno vidi motritelj s okom od 210 mm daljine vida, ako je daljina između okulara i objektiva 214·01 mm, a žarišna daljina objektiva 200 mm i okulara 15 mm?

---

49) Štap od cinka, kojemu je linearni koeficient rastezanja $\alpha = 0{\cdot}00002$, ima kod temperature od $t^0 = 20^0$ dužinu l od 50 cm; kod koje će temperature t_1 biti njegova dužina $l_1 = 50{\cdot}1$ cm?

50) Kod — 20^0 izmjerena je visina barometra 747·3 mm; kolika bi bila kod 0^0, ako se računa za koeficient rastezanja kod žive 0·00018?

51) Kod termometra je polumjer kugle $R = 11{\cdot}1$ mm, a cijevi $r = 0{\cdot}37$ mm, nula (ledište) je 37 mm daleko od kugle; kolika će biti daljina dviju zasebičnih crta za stupnjeve, ako za koeficient rastezanja kod žive uzmemo broj $\frac{1}{5\,5\,0\,0}$?

52) U staklenu posudu može da stane kod 0^0 101 g vode. Ako se temperatura digne do 50^0 isteče preko ruba 0 88 g; koja vrijednost izlazi iz toga za sredni koeficient rastezanja žive u tim granicama, ako se za koeficient rastezanja stakla uzme 0·000008?

53) a) Neka masa plina zaprema kod 0^0 i $p_0 = 760$ mm tlaka obujam $v_0 = 60$ dm^3; kolik je obujam v kod $t^0 = 50^0$ i uz tlak $p = 710$ mm, ako se za koeficient rastezanja žive računa $\frac{1\,1}{3\,0\,0\,0}$?

b) Obujam je neke mase plina 400 cm^3 kod temperature od 0^0 i tlaka od 750 mm; pod kojim će tlakom ista masa plina kod temperature od 200^0 zapremiti obujam od 1733 cm^3, ako se za koeficient rastezanja računa 0·003665?

54) a) Koliko kilograma p_1 vode od temperature $t_1 = 15^0$ treba pomiješati s $p_2 = 11$ kg vode od temperature $t_2 = 45^0$, da se dobije voda s temperaturom $t = 37^0$?

b) Koju temperaturu moraju imati 3 kg vode, ako treba da dadu pomiješani s 5 kg vode od 12^0 temperaturu od 9^0?

55) a) 20 kg vode od $34{\cdot}5^0$ pomiješaju se s 8 kg snijega od 0^0; kolika je temperatura smjese, ako se uzme za tališnu toplinu leda 79·25?

b) 20 kg vode od $31{\cdot}7^0$ pomiješa se s 10 kg snijega od 0^0; koliko će snijega ostati nerastaljeno?

56) a) Kroz 5 kg vode od 25° prolazi u zavijenoj cijevi 0·1 kg vodene pare od 100°; koju će temperaturu primiti voda, ako je toplina isparivanja vode = 537?

b) Koliko se kilograma vode može ugrijati od 27° na 37° tijem, da se kroz tu vodu pušta $\frac{5}{6}$ kg vodene pare od 100°?

57) Para u kotlu parostroja bez ekspansije ima napetost od $s_1 = 2$ atmosfere, u kondensatoru napetost $s_2 = \frac{1}{3}$ atm. U svakoj minuti stapalo (Kolben) svrši $n = 25$ puta svoj dvostruki put, a visina je stapaja (Hubhöhe) $h = 1{\cdot}8$ m; kolik mora da bude prorez stapala, ako treba da je teoretični efekt parostroja $A =$ 10·33 konjskih sila?

58) a) Koliko će grama željeza, koje ima specifičnu toplinu $s =$ 0·114 i temperaturu $t_2 = 275°$ trebati, da se ugrije $q =$ 568·1 g vode od temperature $t_1 = 20°$ na $T = 25°$, ako se uzme, da posuda ima kalorimetričnu vrijednost vode od $v = 1{\cdot}9$ g?

b) Do koje će temperature podići 200 g željeza od 1030° (specifična toplina željeza = 0·114), 2200 g vode od 20°, ako se za posudu računa kalorimetrička vrijednost vode od 80 g.

59) a) Koliko će se grama (q) snijega rastaliti od $p = 634$ g željeza od temperature $t = 500°$? (Specifična toplina željeza = 0·114.)

b) Koliko grama srebra (spec. toplina = 0·057) od 317° treba, da se rastali 456 g snijega?

c) Koju temperaturu treba da ima 3000 g cinka (spec. toplina = 0·0955), da rastali 1146 g snijega?

60) a) Koliko će kilograma uzduha od 78° ugrijati 1·5 kg vode od 13° na 38°, ako se specifična toplina uzduha kod stalnoga tlaka računa 0·2375 i za kalorimetričku vodenu vrijednost kovnih masa (cijevi i posude), koje se zajedno moraju ugrijati, uzme 0·4 kg?

b) Koju temperaturu moraju imati 5 kg vode, ako treba da ih 7 kg uzduha od 51° ugriju za 7°, pa ako se uzme za kalorimetričku vodenu vrijednost kovnih masa 0·7 kg?

61) a) Koliko se kalorija (jedinicâ topline) izvodi, ako se ustavi meteorni kamen, koji je težak 5·3 kg i ima brzinu od 7 km?

b) Za koliko se digne temperatura tijela od specifične topline 0·045, ako udari s brzinom od 222·6 m o čvrst neelastičan predmet?

62) Kugla neelastična teška $p_1 = 53$ kg udari o drugu neelastičnu kuglu, koja se giba istim smjerom. Tijem se povisi temperatura za $t = 152{\cdot}5°$; kolika je težina p_2 druge kugle, ako je diferencija brzine $d = 427$ m?

---

63) a) Koliko Bunsenovih elemenata treba upotrijebiti, da se dobije jakost struje od 3 Ampera, ako svaki element ima elektromotornu silu od 1·8 Volta i unutrašnji otpor od 0·24 Ohma, dočim je izvanji otpor 1·8 Ohma?

b) Baterija od 8 elemenata daje kod izvanjega otpora od 0·1 Ohma jakost struje od 4 Ampera; kolika je elektromotorna sila svakoga elementa, ako je unutrašnji njegov otpor 0·3 Ohma?

c) 25 elemenata od 1·6 Volta daju kod izvanjega otpora od $3\frac{1}{3}$ Ohma struju od 3 Ampera; kolik je unutrašnji otpor svakoga elementa?

64) a) Kako je dugačka bakrena žica, debela 1 mm, koja struju vodi 55 puta bolje nego živa i struji daje otpor od 40 Ohma?

b) Kako debela mora da bude željezna žica, dugačka 139·92 m, koja treba da galvanskoj struji daje otpor od 700 Ohma, ako željezo vodi struju 6 puta bolje nego živa? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

65) a) Koliko Ampera ima struja, koja u 5 minuta razvija 380 cm³ praskavca uz 91° i 684 mm tlaka? (Struju od 1 Ampera razvija u 1 minuti kod 0° i 760 mm tlaka 10·26 cm³ praskavca. Koeficient rastezanja za plinove je $\frac{1}{273}$).

b) Struja od 7·5 Ampera izvodi u 86 minuta kod 136·5° temperature 9234 cm³ praskavca; pod kojim je tlakom praskavac?

66) Koliko je puta veća gustoća elektricitete na kugli od 5 cm polumjera nego na kugli od 10 cm polumjera, ako je količina elektricitete jednaka?

B. Iz geometrije.

67) Jedan je od dva sukuta m puta tako velik kao drugi. Kolik je drugi?

a) $m = 2$; b) $m = 5$; c) $m = 1\frac{1}{2}$; d) $m = 5\frac{2}{3}$.

68) Izvanji je kut u trokutu δ, jedan je od neprileđećih unutrašnjih kutova m puta tako velik kao drugi. Kolik je taj drugi kut?

a) $\delta = 150°$, $m = 2$; b) $\delta = 128°$, $m = 3$;

c) $\delta = 147°$, $m = 2\frac{1}{2}$; d) $\delta = 158{\cdot}4°$; $m = 1{\cdot}4$.

$x + 5x = 180$

$x = 30$ 30, 150

69) U trokutu ABC je $\sphericalangle A = \alpha^0$; $\sphericalangle B$ je m puta tako velik kao A i C zajedno; kolik je $\sphericalangle C$?

a) $\alpha = 30^0$, $m = 4$; b) $\alpha = 25^0$, $m = 2$;
c) $\alpha = 5^0$, $m = 9$; d) $\alpha = 7^0$, $m = 11$.

70) U trokutu ABC $\sphericalangle A$ je m puta tako velik kao $\sphericalangle C$, $\sphericalangle B$ je n puta tako velik kao A i C zajedno; kolik je $\sphericalangle C$?

a) $m = 4$, $n = 5$; b) $m = 7$, $n = 3$;
c) $m = 10$, $n = 2$; d) $m = 2\frac{1}{2}$, $n = 1\frac{1}{4}$.

71) U četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle A = \alpha^0$, $\sphericalangle B$ je m puta, a $\sphericalangle C$ je n puta tako velik kao $\sphericalangle D$; kolik je $\sphericalangle D$?

a) $\alpha = 40^0$, $m = 4$, $n = 5$; b) $\alpha = 75^0$, $m = 3$, $n = 11$;
c) $\alpha = 10^0$, $m = 2\frac{1}{2}$, $n = 3\frac{1}{2}$; d) $\alpha = 30^0$, $m = 1{\cdot}8$, $r = 2{\cdot}7$.

72) U četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle A$ m puta tako velik kao $\sphericalangle D$, $\sphericalangle B$ je n puta tako velik kao $\sphericalangle D$, i $\sphericalangle C$ je r puta tako velik kao A i B zajedno; kolik je $\sphericalangle D$?

a) $m = 6$, $n = 5$, $r = 3$; b) $m = 5$, $n = 2$, $r = 6$;
c) $m = 4$, $n = 3$, $r = 2$; d) $m = 6$, $r = 5$, $r = 4$.

73) Jedna je kateta pravokutnoga trokuta a, druga je kateta za n manja od hipotenuze; kolika je hipotenuza?

a) $a = 8$ cm, $n = 2$ cm; b) $a = 18$ cm, $n = 6$ cm;
c) $a = 10\frac{1}{2}$ m, $n = 4{\cdot}9$ m; d) $a = 3\frac{1}{4}$ m, $n = 1{\cdot}69$ m.

74) U krugu je povučena tetiva od dužine a. Daljina je tetive od središta za n manja od polumjera kruga; kolik je polumjer kruga?

a) $a = 40$ cm, $n = 10$ cm; b) $a = 54$ cm, $n = 9$ cm;
c) $a = 8{\cdot}8$ m, $n = 0{\cdot}8$ m; d) $a = 3{\cdot}04$ m, $n = 0{\cdot}32$ m.

75) Treba konstruirati istokračan trokut u kojem je osnovka $= b$, a krak je za n veći od visine na osnovku; kolika se mora uzeti visina?

a) $b = 36$ cm, $n = 6$ cm; b) $b = 88$ cm, $n = 22$ cm;
c) $b = 33{\cdot}6$ m, $n = 9{\cdot}8$ m; d) $b = 5\frac{1}{2}$ m, $n = 1{\cdot}21$ m.

76) U pravokutniku s dužinom l je diagonala za n veća od širine; kolika je širina?

a) $l = 25$ cm, $n = 26$ cm; b) $l = 76$ cm, $n = 38$ cm;
b) $l = 13{\cdot}2$ m, $n = 7{\cdot}2$ m; d) $l = 3{\cdot}1$ m, $n = \frac{1}{4}$ m.

77) Stablo visoko v prelomio je vihar i ono udari s vrhom u daljini a od panja na tle; u kojoj se je visini iznad tla prelomilo?

a) $v = 18$ m, $a = 12$ m; b) $v = 12{\cdot}8$ m, $a = 11{\cdot}2$ m;
c) $v = 16{\cdot}9$ m, $a = 3{\cdot}9$ m; d) $v = 16{\cdot}2$ m, $a = 14{\cdot}4$ m.

78) U mnogokutu je broj stranica za m, a broj svih diagonala za n veći nego u drugom mnogokutu; koliko stranica ima drugi mnogokut?

1) $m = 4$, $n = 22$; 2) $m = 5$, $n = 45$;
3) $m = 2$, $n = 19$; 4) $m = 3$, $n = 36$.

§. 18. Proporcije.

Iz $a : b = c : d$ izlazi:

I. $ad = bc$ ili $d = \frac{bc}{a}$, $c = \frac{ad}{b}$, $b = \frac{ad}{c}$, $a = \frac{bc}{d}$.

II. 1) $a : c = b : d$, 2) $b : a = d : c$, 3) $b : d = a : c$, 4) $c : a = d : b$, 5) $c : d = a : b$, 6) $d : b = c : a$ i 7) $d : c = b : a$.

III. $ma : mb = c : d$, $ma : b = mc : d$ i t. d.

IV. $(a + b) : (c + d) = a : c$; $(a + b) : (c + d) = b : d$; $(a + c) : (b + d) = a : b$ i t. d.

V. $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$; $(a + c) : (a - c) = (b + d) : (b - d)$ i t. d.

VI. $(ma + nb) : (pa + qb) = (mc + nd) : (pc + qd)$.

§. 18. A.

1) Koji su članovi homologni u proporciji $72 : 100 = 198 : 275$?

2) Kako ćeš s dvije multiplikacije ispitati je li proporcija prava?

3) Kolik mora biti x, da bude prava proporcija $36 : 100 = x : 25$?

4) Izračunaj nepoznati član u ovim proporcijama:

a) $5 : 3 = 35 : x$; b) $\frac{24}{x} = \frac{2}{12}$;
c) $x : 15 = 323 : 85$; d) $3\frac{3}{4} : x = 15 : 4$;
e) $\frac{5}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{9} : x$; f) $\frac{4}{11} : 3\frac{3}{7} = x : 1\frac{5}{6}$.

5) Izračunaj nepoznati član u proporcijama:

a) $4a : x = b : \frac{1}{4}c$; b) $2ab : c = x : \frac{3}{4}c$;
c) $\frac{a}{b} : x = e : \frac{b}{c}$; d) $4ab : 5cd = \frac{1}{25}a : x$;
e) $\frac{7a}{3b} : \frac{4c}{9d} = x : \frac{b}{21a}$; f) $\frac{a^2 - b^2}{x} = \frac{a + b}{1}$;
g) $\frac{(a-b)^2}{3c} : \frac{a^2 + 2ab + b^2}{6c} = \frac{a - b}{a + b} : x$; h) $\frac{a^2 - b^2}{a(a-b)} = \frac{x}{a}$.

6) Izračunaj nepoznati član u proporciji:

$$(m + n) : (m^3 + n^3) = x : (m^2 - mn + n^2).$$

Izvedi jednadžbu produkta iz proporcija:

7) a) $3:4=6:8$; b) $17:18=51:54$;
c) $125:145=225:261$.

8) a) $88:28\cdot16=3\cdot125:1$; b) $3\cdot4:4\cdot7=6\cdot8:9\cdot4$.

9) a) $\frac{9}{10}:\frac{11}{12}=2\frac{2}{11}:2\frac{2}{9}$; b) $3\frac{2}{3}:4\frac{3}{4}=\frac{12}{19}:\frac{9}{11}$.

10) a) $3a^2b:4ab^2=6ac^2:8bc^2$;

b) $\frac{1}{9}a^3b^4c^5:0{\cdot}1a^5b^4c^3=\frac{3}{7}ab^2c^3:\frac{27}{70}a^3b^2c$;

c) $4{\cdot}8p^2q^3:5\frac{5}{6}q^2r^3=\frac{6q}{35r^2}:\frac{5r}{24p^2}$.

11) a) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{c}:b$; b) $\frac{x^2y^3}{z^4}:\frac{x^3y^4}{z^5}=\frac{z^3}{x^4y^5}:\frac{z^2}{x^3y^4}$;

c) $\frac{pq^2r}{st^2u}:\frac{p^2qr^2}{s^2tu^2}=\frac{s^3t^2u^3}{p^3q^2r^3}:\frac{s^2t^3u^2}{p^2q^3r^2}$.

12) a) $(a+b):(a^2-b^2)=(a-b):(a^2-2ab+b^2)$;

b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}:\frac{a-b}{a+b}=(a^2+2ab+b^2):(a^2+b^2)$.

---

§. 18. B.

Iz svake se jednadžbe dvaju produkta može izvesti po osam proporcija. Izvedi ih i ispitaj jesu li izvedene proporcije prave u ovim primjerima:

13) a) $3\,.\,8=4\,.\,6$; b) $6\,.\,35=21\,.\,10$; c) $143\,.\,323=209\,.\,221$.

14) a) $0{\cdot}24\,.\,2{\cdot}5=0{\cdot}4\,.\,1{\cdot}5$; b) $5{\cdot}75\,.\,0{\cdot}28=0{\cdot}08\,.\,20{\cdot}125$;
c) $0{\cdot}8\,.\,0{\cdot}375=1{\cdot}875\,.\,0{\cdot}16$.

15) a) $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}=\frac{8}{9}\cdot\frac{27}{35}$; b) $\frac{10}{11}\cdot\frac{11}{12}=\frac{12}{13}\cdot\frac{65}{72}$;

c) $2\frac{3}{4}\cdot5\frac{6}{7}=8\frac{9}{10}\cdot1\frac{1009}{1246}$.

16) a) $a^2b\,.\,bc^2=ab^2\,.\,ac^2$; b) $xy^2z^3\,.\,x^3y^2z=xy^2z\,.\,x^3y^2z^3$.

17) a) $\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{x}=\frac{z}{u}\cdot\frac{u}{y}$; b) $\frac{a^2b}{c^2d}\cdot\frac{bc^2}{de^2}=\frac{a^2f}{d^2e}\cdot\frac{b^2}{ef}$;

c) $\frac{12mn^2}{o^3p^4}\cdot\frac{27op^2}{m^3n^4}=\frac{2m^2n^2}{o^4p^4}\cdot\frac{162o^2p^2}{m^4n^4}$.

18) a) $(a-b)^2\,.\,(a+b)^2=(a^2-b^2)\,.\,(a^2-b^2)$;

b) $\frac{a+b}{a-b}\cdot(a^2-b^2)=(a+b)\,.\,(a+b)$;

c) $\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2+y^2}{x+y}\cdot\frac{x-y}{x^2-y^2}$.

---

§. 18. C.

19) Izrazi u najmanjim cijelim brojevima omjere:

a) $115:161$; b) $231:616$; c) $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$; d) $\frac{8}{9}:\frac{4}{15}$;

e) $2\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}$; f) $7\frac{1}{4}:4\frac{5}{6}$; g) $8\frac{3}{5}:18\frac{3}{7}$; h) $14\frac{5}{11}:26\frac{1}{2}$;

i) $0{\cdot}8:0{\cdot}6$; k) $0{\cdot}45:1{\cdot}8$; l) $0{\cdot}078:0{\cdot}117$; m) $2{\cdot}646:1{\cdot}47$.

20) Izrazi u najmanjim cijelim brojevima omjere:

a) $4ab:6bx$; b) $9a^2b:12ab^2$; c) $1\frac{2}{3}x^3y:1\frac{1}{9}xy^3$;

d) $2\frac{4}{5}p^4q:2\frac{1}{3}p^2q^3$; e) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$; f) $\frac{4a}{7b}:\frac{3x}{14x}$;

g) $\frac{15a}{8x}:\frac{5b}{12x}$; h) $3\frac{1}{3}x:\frac{5bx}{2a}$; k) $\frac{x+1}{x-1}:\frac{x^2+1}{x^2-1}$;

l) $4(a+b)\,x:6(a+b)y$; m) $6\frac{2}{3}(a-b)y:4\frac{1}{6}(ay+by)$;

n) $5\frac{1}{3}(a+b)^2:3\frac{1}{5}(a^2-b^2)$; o) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\frac{a-b}{a+b}$.

Izrazi što manjim cijelim brojevima proporcije, koje dolaze, ali da ne mijenjaš pri tom član x:

21) a) $4:x=12:18$; b) $154:33=35:x$; c) $x:143=132:1716$.

22) a) $3{\cdot}75:4{\cdot}8=0{\cdot}78125:x$; b) $x:1{\cdot}13=0{\cdot}625:7{\cdot}0625$;
c) $0{\cdot}234:10{\cdot}53=x:2{\cdot}106$.

23) a) $\frac{5}{6}:\frac{11}{18}=x:\frac{2}{3}$; b) $\frac{6}{7}:x=\frac{12}{13}:\frac{14}{15}$; c) $3\frac{1}{3}:1\frac{1}{9}=x:\frac{5}{6}$.

24) a) $abc:ac=bc:x$; b) $x:m^2n^3=n^3o^4:m^2n^3o^4$;
c) $ab^2c^3:a^2b^3c^4d^5=x:b^2c^3d^4$.

25) a) $x:3bc=4ab:12ab^2c$; b) $\frac{a^2}{5}:x=\frac{b^2}{6}:\frac{ab}{15}$;

c) $\frac{3pq}{4r}:\frac{12p^3q^3}{13}=x:\frac{4p^2q^2r}{13}$.

26) a) $(a+b):(a-b)=(a^2-b^2):x$;

b) $\frac{a+b}{a-b}:\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a+b}:x$;

c) $(m+n):(m^3+n^3)=x:(m^2-mn+n^2)$.

Neka se odredi **četvrta proporcionala** brojeva:

27) a) 15, 18, 20; b) 21, 28, 27; c) 20, 24, 15.

28) a) 0·12, 1·8, 0·8; b) 4·8, 10·2, 8; c) 0·125, 3·372, 0·625.

29) a) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{2}$; b) $\frac{8}{9}$, $\frac{10}{11}$, $29\frac{1}{3}$; c) $3\frac{1}{7}$, $4\frac{1}{8}$, $25\frac{1}{7}$.

30) a) a, b, c; b) mn^2, no^2, op^2; c) $15a^2b^2c^2d^2$, $3a^2bc$, $5bcd^2$.

31) a) $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$; b) $\frac{ab^2}{d^2c}$, $\frac{ab}{cd}$, $\frac{bc}{de}$; c) $a-b$, $a+b$, a^2-b^2.

§. 18. E.

Neka se odredi treća proporcionala brojeva:

32) a) 18, 24; b) 25, 35; c) 48, 36.

33) a) 1·2, 1·8; b) 16·4, 2·46; c) 4·932, 3·288.

34) a) $1\frac{7}{9}$, $1\frac{1}{3}$; b) $1\frac{9}{16}$, $1\frac{1}{4}$; c) $1\frac{11}{25}$, $2\frac{2}{5}$.

35) a) p, q; b) a^2b^2, b^2c^2; c) $4abc$, $6bcd$.

36) a) $a-b$, a^2-b^2; b) $\frac{(a^2-b^2)^2}{(a+b)^4}$, $\frac{a-b}{a+b}$.

Neka se odredi srednja **geometrička** proporcionala brojeva:

37) a) 3, 12; b) 72, 8; c) 4, 144.

38) a) 0·2, 1·8; b) 0·0018, 0·72; c) 25·6, 0·196.

39) a) $\frac{4}{3}$, $\frac{16}{27}$; b) $18\frac{3}{8}$, $2\frac{2}{3}$; c) $18\frac{2}{11}$, $5\frac{1}{2}$.

40) a) a^2, b^2; b) pq^2, p^3q^4; c) $4a^2b^3c^4$, $9a^4b^5c^6$.

41) a) $a^2-2ab+b^2$, $a^2+2ab+b^2$; b) a^2-b^2, $\frac{a+b}{a-b}$;

c) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, a^4-b^4.

42) a) $\frac{pq}{r}$, $\frac{qr}{p}$; b) $\frac{mn^2}{o^3}$, $\frac{o}{m}$; c) $\frac{3ab^2c^3}{4d^4e^5f^6}$, $\frac{48a^5b^4c^3}{25d^2e}$.

Neka se odredi srednja **aritmetička** proporcionala brojeva:

43) a) 4, 7, 11, 18; b) 9, 14, 29, 36, 47.

44) a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$.

45) a) 12·6, 15·7, 23·3, 41·8; b) 2·3, 3·4, 4·5, 5·6, 6·7, 7·8.

46) a) $8\frac{2}{5}$, $9\frac{5}{6}$, $10\frac{3}{10}$, $12\frac{1}{3}$; b) $3\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{5}$, $6\frac{1}{6}$, $7\frac{1}{7}$, $8\frac{1}{8}$.

Odredi srednju harmoničnu proporcionalu brojeva:

47) a) 1 i 2; b) 4 i 9; c) $3\frac{1}{2}$ i $4\frac{1}{7}$; d) $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$.

48) Ako je srednja geometrička proporcionala (geometrički srednjak) dvaju brojeva $= g$, njihova srednja aritmetička proporcionala (aritmetički srednjak) $= a$, a njihova srednja harmonična proporcionala(harmonički srednjak) $= h$, postoji proporcija $h:g=g:a$. Dokaži taj poučak i reci ga riječima.

49) Ako su p i q dva positivna broja, ako je a njihov aritmetički srednjak, g njihov geometrički srednjak, postoji jednadžba: $(a+g)(a-g)=\frac{1}{4}(p-q)^2$. Dokaži to.

50) Dokaži, da aritmetički srednjak dvaju positivnih brojeva nije nikada manji od njihova geometričkoga srednjaka.

51) Dokaži, da harmonički srednjak dvaju positivnih brojeva nije nikada veći od njihova geometričkoga srednjaka.

52) Ako su p i q dva zadana broja, ako je a njihov aritmetički i h njihov harmonički srednjak, tada postoji proporcija:

$$p:a=h:q,$$

koju je već Pytagora znao; zvali su ju najsavršenijom ili muzikalnom proporcijom. Dokaži ju.

---

§. 18. F.

Odredi x s primjenom poučaka **o sumama i diferencijama članova** iz proporcija:

53) a) $(9-x):x=4:5$; b) $(10+x):x=21:11$;
c) $x:(x+7)=11:25$; d) $50:49=x:(x-2)$.

54) a) $(18+x):18=14\cdot5:9$; b) $3:(3+x)=6:10$;
c) $(2-x):2=13:26$; d) $7:(x-7)=63:117$.

55) a) $\frac{4}{5}:\frac{6}{7}=\left(2\frac{14}{15}-x\right):x$; b) $x:\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{5}:\frac{4}{5}$;

c) $\frac{3}{4}:\left(x-\frac{3}{4}\right)=\frac{6}{7}:3\frac{5}{7}$; d) $5\frac{2}{5}:9\frac{2}{5}=6\frac{3}{4}:\left(x+6\frac{3}{4}\right)$.

56) a) $a:b=(c+x):x$; b) $x:(a-x)=c:d$;
c) $a:(a+x)=b:c$; d) $a:b=(c-x):c$.

57) a) $(a+b)^2:(a^2+b^2)=(2ab+x):x$;
b) $(a-b)^2:(a^2-b^2)=(x-2b):x$.

58) a) $2:x=3:(x+1)$; b) $(x+3):12=x:10$;
c) $x:5=(x-2):4$; d) $14:(90-x)=16:x$.

59) a) $\frac{1}{2}:x=\frac{3}{4}:\left(x+\frac{5}{12}\right)$; b) $x:\frac{4}{5}=\left(x-\frac{6}{35}\right):\frac{2}{3}$;

c) $\frac{3}{4}:\frac{7}{8}=\frac{5}{6}:\left(x+\frac{7}{8}\right)$; d) $\frac{4}{5}:\left(\frac{20}{21}-x\right)=\frac{6}{7}:\frac{20}{21}$.

60) a) $a:x=c:(x-b)$; b) $(a+x):b=x:c$;
c) $a:b=c:(x-b)$; d) $a:(x+b)=c:b$.

---

61) a) $(9+x):(9-x)=8:1$; b) $3:4=(7-x):(7+x)$;
c) $(x-2):(x+2)=5:9$.

62) a) $3\cdot6:10\cdot2=(x-1\cdot1):(x+1\cdot1)$;
b) $2\cdot3:4\cdot5=(1\cdot7-x):(1\cdot7+x)$;
c) $19\cdot6:11\cdot9=(0\cdot225+x):(0\cdot225-x)$.

63) a) $\left(x+3\frac{3}{4}\right):\left(3\frac{3}{4}-x\right)=\frac{6}{7}:\frac{3}{7}$;

b) $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\left(x-\frac{1}{18}\right):\left(x+\frac{1}{18}\right)$;

c) $\left(x-\frac{1}{35}\right):\left(x+\frac{1}{35}\right)=\frac{8}{9}:\frac{20}{21}$.

64) a) $(a+b):(a-b)=(x+c):(x-c)$;
b) $(r+x):(r-x)=(p^2+2pq+q^2):(p^2-q^2)$;
c) $(a^2-2ab+b^2):(a^2-b^2)=(x-b):(x+b)$.

---

§. 18. G.

Izvedi treću proporciju tako, da x ispada:

65) a) $\left|\begin{array}{l}3:4=6:x\\4:5=x:10\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}7:x=14:16\\27:24=9:x\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}x:10=32:40\\48:66=x:11\end{array}\right|$

66) a) $\left|\begin{array}{l}12:13=x:26\\8:9=x:27\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}14:15=x:30\\12:x=3:7\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}x:17=32:34\\3:4=12:x\end{array}\right|$

67) a) $\left|\begin{array}{l}1\cdot2:2\cdot3=2\cdot4:x\\x:4\cdot7=9\cdot2:9\cdot4\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}:x=3\frac{1}{2}:5\frac{1}{4}\\3\frac{3}{7}:5\frac{5}{7}=x:1\frac{1}{4}\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}x:4\frac{5}{6}=1\frac{3}{7}:4\frac{1}{7}\\\frac{7}{9}:\frac{5}{9}=2\frac{1}{3}:x\end{array}\right|$

68) a) $\left|\begin{array}{l}a:b=x:c\\c:d=x:e\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}m:n=x:o\\m:x=o:n\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}x:p=q:r\\s:q=t:x\end{array}\right|$

69) a) $\left|\begin{array}{l}ab:bc=cd:x\\x:ac=bd:ad\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}mn^2:x=no^2:op^2\\mo^2:mp^2=x:np^2\end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l}x:e^2f=f^2g:g^2h\\e^2g:e^2h=f^2h:x\end{array}\right|$

Sastavi proporcije, koje su jedna ispod druge i krati što više možeš:

70) a) $\left|\begin{array}{l}3:4=9:y\\5:6=x:12\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}a:b=9:10\\c:d=3:4\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}a:b=9:10\\b:c=15:27\end{array}\right|$

71) a) $\left|\begin{array}{l}a:b=5:7\\b:c=7:8\\c:d=8:9\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}a:b=c:d\\b:d=e:f\\d:a=d:c\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}3a:b=4c:\frac{1}{2}d\\d:5c=9d:8e\\\frac{3}{4}b:a=7e:c\end{array}\right|$

Načini neprekidnu proporciju, koja se počinje s $a:b:c$ i ima samo cijele brojeve, iz ovih proporcija:

72) a) $\left|\begin{array}{l}a:b=3:4\\b:c=4:7\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}a:b=11:12\\b:c=6:7\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}a:c=3:8\\b:c=7:4\end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l}a:b=9:3\frac{1}{2}\\b:c=5:8\\c:d=16:7\end{array}\right|$ e) $\left|\begin{array}{l}a:b:c=4:7:9\\b:d=3\frac{1}{2}:5\end{array}\right|$ f) $\left|\begin{array}{l}a:d=1:3\frac{3}{4}\\b:d=81:30\\c:a=9:8\end{array}\right|$

Načini najjednostavnije neprekidne proporcije i upotrijebi na nje poučak: ako je $x:y:z=a:b:c$, onda je $(x+y+z):z=(a+b+c):c$:

73) a) $\left|\begin{array}{l}a:b=3:4\\b:c=5:6\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}7:8=p:q\\9:10=q:r\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}m:n=11:12\\n:o=13:14\end{array}\right|$

74) a) $\left|\begin{array}{l}p:q=5:6\\p:r=7:8\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}a:c=15:16\\b:c=15:24\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}21:23=m:n\\28:29=m:o\end{array}\right|$

75) a) $\left|\begin{array}{l}a:b=1\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}\\a:c=3\frac{3}{4}:4\frac{4}{5}\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}a:b=2\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}\\c:b=4\frac{1}{4}:5\frac{1}{5}\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}1\cdot23:2\cdot34=a:b\\3\cdot45:4\cdot56=a:c\end{array}\right|$

76) a) $\left|\begin{array}{l} a:b=2:3 \\ b:c=4:5 \\ c:d=6:7 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} a:b=8:9 \\ c:b=10:11 \\ c:d=12:13 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}:\frac{2}{3}=a:b \\ \frac{3}{4}:\frac{4}{5}=b:c \\ \frac{5}{6}:\frac{6}{7}=d:c \end{array}\right|$

§. 18a. Primjene proporcija.

A. Pravilo trojno.

§. 18. D.

1) Za odjeću treba 10 m tkanine široke 72 cm; koliko će metara trebati od tkanine široke 75 cm?

2) Koliko će sati trebati pješak za 32 km, ako prevali 2 km za 23 minute?

3) a m^3 plina hrani u određenom vremenu b svjetiljaka; koliko m^3 treba, da isto vrijeme hrani c svjetiljaka?

4) $17\frac{1}{2}$ metara sukna stoji 131 *K* 25 *f*; što stoji $9\frac{3}{8}$ metara toga sukna?

5) a kilograma neke robe stoji b *K*, što stoji m kilograma?

6) a) 18 radnika radi na nekom poslu 35 dana, koliko će na njem raditi 45 radnika?

b) Koliko će radnika trebati, da taj isti posao dovrše u 1) 21, 2) 24 dana?

7) A treba od mjesta M do mjesta N t sati, ako u svakom satu prevali a metara; koliko će trebati za taj isti put B, ako prevali na sat b metara?

$t = 8{\cdot}4$; $a = 4500$; $b = 3600$.

8) Iz m kilograma prediva možeš satkati n metara platna b centimetara širokoga; koliko ćeš metara moći satkati, ako treba da bude platno c centimetara široko?

9) m momaka izaći će s nekom količinom provianta n mjeseci, ako se računa na momka a kilograma u t dana; koliko će s njim izaći m' momaka, ako se sada računa b kilograma na momka u t' dana?

$m = 380$, $n = 8$, $t = 4$, $a = 3$, $m' = 240$, $t' = 3$, $b = 2$.

10) Ako 30 radnika mogu za 45 dana uz dnevni rad od 8 sati dovršiti kanal dugačak 5000 metara, širok 2 metra i dubok $1\frac{1}{2}$ metra; koliko će vremena imati posla 64 radnika uz dnevni rad od 11 sati, da dovrše kanal dugačak 660 metara, širok $3\frac{1}{2}$ metra i dubok $2\frac{1}{2}$ metra, ako je drugi kanal teže kopati od prvoga, pa radnik kod drugoga kanala digne 3 kubična metra zemlje, dok radnik kod prvoga digne 4 kubična metra?

B. Planimetrija.

Izrazi što jednostavnije omjere, koje ćeš izračunati u ovim zadaćama:

11) Na dužinama a i b konstruirani su kvadrati. Traži se omjer njihovih pljoština.

a) $a = 4\,cm$, $b = 6\,cm$; b) $a = 9\,cm$, $b = 12\,cm$;
c) $a = 2\frac{1}{4}\,cm$, $b = 4\frac{1}{2}\,cm$; d) $a = 2{\cdot}4\,cm$, $b = 3{\cdot}6\,cm$.

12) Pljoštine su dvaju kvadrata p_1 i p_2. Kolik je omjer njihovih stranica?

a) $p_1 = 25\,cm^2$, $p_2 = 36\,cm^2$; b) $p_1 = 20\,cm^2$, $p_2 = 45cm^2$;
c) $p_1 = 252\,cm^2$, $p_2 = 343\,cm^2$; d) $p_1 = 384\,cm^2$, $p_2 = 486\,cm^2$.

13) Dva kruga imaju polumjere r_1 i r_2. Traži se omjer njihovih pljoština p_1 i p_2.

a) $r_1 = 8cm$, $r_2 = 12\,cm$; b) $r_1 = 12\,cm$, $r_2 = 15\,cm$;
c) $r_1 = 14\,cm$, $r_2 = 21\,cm$; d) $r_1 = 18\,cm$, $r_2 = 24\,cm$.

14) Pljoštine su krugova p_1 i p_2. Traži se omjer njihovih polumjera. ($\pi = 3{\cdot}14$.)

a) $p_1 = 50{\cdot}24\ cm^2$, $p_2 = 113{\cdot}04\ cm^2$;
b) $p_1 = 254{\cdot}34\ cm^2$, $p_2 = 452{\cdot}16\ cm^2$;
c) $p_1 = 200{\cdot}96\ cm^2$, $p_2 = 314\ cm^2$.

15) Na zadanoj je dužini (kao hipotenuzi) konstruiran istokračno-pravokutan trokut i osim toga istostraničan trokut. Kolik je omjer pljoština obaju likova?

16) Na zadanoj je dužini konstruiran istostraničan trokut i polukrug. Traži se omjer pljoština obaju likova.

17) a) Krugu je opisan kvadrat; kolik je omjer pljoština obaju likova?

b) Krugu je upisan kvadrat; kolik je omjer pljoština obaju likova?

---

18) Dvije su stranice trokuta a i b centimetara. Od jedne točke na prvoj stranici, koja je m centimetara daleko od vrha njihovoga kuta, povuče se usporednica s trećom stranicom; gdje pogodi ta usporednica drugu stranicu?

a) $a = 12\ cm$, $b = 16\ cm$, $m = 9\ cm$;
b) $a = 35\ cm$, $b = 55\ cm$, $m = 7\ cm$.

19) Stranice su trokuta a, b i c centimetara dugačke; na kolike se komade razdijeli najveća stranica raspolovnicom kuta njoj suprotnoga?

1) $a=12\ cm$, $b=15\ cm$, $c=18\ cm$;
2) $a=44\ cm$, $b=48\ cm$, $c=69\ cm$.

20) Osnovnice su dvaju sličnih trokuta b_1 i b_2 milimetara dugačke, visina je prvoga trokuta v_1 milimetara; kolika je visina drugoga trokuta?

1) $b_1=185\ mm$, $b_2=222\ mm$, $v_1=195 mm$;
2) $b_1=217\ mm$, $b_2=341\ mm$, $v_1=203\ mm$.

21) a) Pljoštine su dvaju sličnih trokuta p_1 i p_2, a osnovnica prvoga b_1; kolika je osnovnica drugoga trokuta?

1) $p_1=99\ cm$, $p_2=176\ cm$, $v_1=12\ cm$:
2) $p_1=75\ cm$, $p_2=108\ cm$, $v_1=10\ cm$.

b) Dvije su homologne stranice u sličnim mnogokutima s_1 i s_2, a pljoština je prvoga mnogokuta p_1; kolika je pljoština drugoga mnogokuta?

1) $s_1=6{\cdot}5\ cm$, $s_2=9{\cdot}1\ cm$, $p_1=25\ cm^2$;
2) $s_1=5{\cdot}6\ cm$, $s_2=6{\cdot}3\ cm$, $p_1=64\ cm^2$.

22) a) Hipotenuza je pravokutnoga trokuta c, jedna kateta a; na kolike se komade razdijeli hipotenuza okomicom, koja se spusti s vrha pravoga kuta na hipotenuzu?

1) $c=9\ cm$, $a=6 cm$; 2) $c=25\ cm$, $a=15\ cm$.

b) Visina spuštena s vrha pravoga kuta na hipotenuzu pravokutnoga trokuta razdijeli hipotenuzu na komade p i q; kolika je veća kateta?

1) $p=9\ cm$, $q=7\ cm$; 2) $p=25\ cm$, $q=144\ cm$.

c) Visina spuštena s vrha pravoga kuta na hipotenuzu pravokutnoga trokuta razdijeli hipotenuzu na dva komada p i q; kolika je ta visina?

1) $p=16\ mm$, $q=25\ mm$; 2) $p=18\ mm$, $q=98\ mm$.

23) Stranice su trokuta a, b i c; kako se odnose njegove tri visine?

1) $a=3\ cm$, $b=4\ cm$, $c=6\ cm$;
2) $a=5\ cm$, $b=7\ cm$, $c=8\ cm$.

C. Fizika.

24) Kosina bez trijenja.

a) Cesta ima naklon od 8%; kolika će sila zapriječiti, a se kola teška 875 kilograma ne kotrljaju niz kosinu? [12·5%, 1600 kg.]

b) Kolika smije da bude težina kola, koja treba ustaviti tlakom od 360 kilograma na željezničkim šinjama, koje imaju naklon od 1·5%? [400 *kg*, 2%.]

c) Brijeg ima naklon od 30°; kolika će sila ustaviti kuglu tešku 2·2 kilograma, da se ne kotrlja niz brijeg? [3·4 *kg*.]

25) Poluga.

a) Poluga dugačka 1·6 metara namještena je horizontalno i potporište je 1·5 metara udaljeno od hvatišta sile; ako se na ovom objesi čovjek s cijelom svojom težinom od 180 kilograma, koliku će silu tijem izvesti na drugom kraju poluge? [1·4 *m*, 1·2 *m*, 170 *kg*.]

b) Na tačkama je držak 1·76 metara daleko od osovine kotača; čovjek može da digne uz turanje tačaka samo još 50 kilograma, ali hoće da natovari 200 kilograma; kako blizu treba da bude težište toga tereta osovini kotača? [1·75 *m*, 40 *kg*, 140 *kg*.]

26) Kolo na vretenu.

a) Iz bunara treba u kablici navući vode s pomoću užeta, koje se namata na vretenu. Kako dugačak treba da bude polumjer kola (ručica), ako je premjer vretena 12 centimetara, ako puna kablica ima 60 kilograma, a sila, koja se može upotrijebiti nije veća od 15 kilograma? [b) 50 *kg*, 14 *cm*, 17·5 *kg*.]

b) U skladištu se robe diže roba s pomoću kola na vretenu. Sila, koja se upotrebljava na kolu, može narasti do 180 kilograma. Premjer je kola 2·6 metara, a premjer vretena 15 centimetara; kolik se teret može dignuti tim kolom na vretenu? [190 *kg*, 2·4 *m*, 16 *cm*.]

c) Na vitlu za sidro ima vreteno premjer od 10 centimetara, a žlice kolesa dugačke su 1·6 metara. Sidro i lanac teški su u vodi 4000 kilograma; kolika treba sila s početka, kad se sidro istrgne iz dna? (11 *cm*, 1·65 *m*, 3000 *kg*.]

27) Mariotteov zakon.

a) U manometru zatvoren uzduh dugačak je 12 centimetara kod tlaka od 1 atmosfere; kolika mu je dužina kod tlaka od 3 atmosfere? [20 *cm*, 4 atm.]

b) Kod tlaka od 2 atmosfere dugačak je stupac uzduha u manometru 8 centimetara; koliko je atmosfera tlak, ako je stupac uzduha dugačak 4 centimetra? [6 atm, 15 *cm*, 10 *cm*.]

c) Stupac uzduha u manometru dugačak je 24 centimetra kod tlaka od 1 atmosfere; koji se tlak u cijelim atmosferama može izraziti cijelim centimetrima?

§. 18b. Primjeri za ponavljanje.

A. Planimetrija.

1) Razmjernost pravaca u krugu i na njemu. (§. 25. A.)

a) Na tetivi kruga dugačkoj 20 centimetara odreže druga tetiva komad dugačak 2 centimetra, a prva odreže na drugoj komad dugačak 3 centimetra; kolika je druga tetiva? [19 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*.]

b) Dvije su sekante dugačke 91 i 143 milimetra, a izvanji je odsječak prve dug 55 milimetara; kolik je unutrašnji odsječak druge sekante? [209 i 323 *mm*, 55 *mm*.]

c) Sekanta je dugačka 36 centimetara, njezin unutrašnji odsječak 11 centimetara; kolika je tangenta, koja se povuče na krug od izvanjega kraja sekante? [196 *cm*, 180 *cm*.]

2) Četiri harmonične točke (§. 21. F.)

a) Omjer u kojem treba dužinu AB razdijeliti je 2:3, daljina je obiju unutrašnjih točaka 4 centimetra; kako su daleko jedna od druge obje izvanje točke? [5:6, 15 *cm*.]

b) Omjer je 3:5. Daljina je izvanjih točaka 140 centimetara; kolika je daljina unutrašnjih? [7:11, 198 *cm*.]

c) Izvanje točke imaju daljinu 24 centimetra, unutrašnje daljinu 4 centimetra; kako su daleko izvanje točke od unutrašnjih? [40 *cm*, 6 *cm*.]

d) Daljina je unutrašnjih točaka od izvanjih 10 i 3 centimetra; kolika je daljina unutrašnjih među sobom i izvanjih među sobom? [30 *cm*, 7 *cm*.]

3) Perspektivna središta (§. 21. F. d.)

a) Središta dvaju krugova s polumjerima od 3 i 4 centimetra imaju daljinu od 14 centimetara; kako su daleko jedno od drugoga perspektivna središta? [6 i 13 *cm*, 133 *cm*.]

b) Perspektivna središta dvaju krugova s polumjerima od 7 i 13 milimetara daleko su jedno od drugoga 182 milimetra; kolika je daljina obaju središta? [14 i 15 *mm*, 7980 *mm*.]

c) Središta su dvaju krugova daleko jedno od drugoga 168 *cm*, a perspektivna središta 374 centimetra, a veći je polumjer kruga 17 centimetara; kolik je manji? [84 *cm*, 437 *cm*, 23 *cm*.]

B. Fizika.

I. *Mehanika.*

4) Dizanje u kapilarnim cijevima.

a) U staklenoj se cijevi s premjerom od 2 milimetra digne voda 15 *mm* visoko; koliko se digne u cijevi s premjerom od 0·75 milimetara? [15 *mm*, 20 *mm*, 1·2 *mm*.]

b) U cijevi s premjerom od 1·6 milimetara digne se alkohol 7·5 milimetara; kod kojega će se premjera alkohol dići 18·75 milimetara visoko? [2, 6, 7·5 *mm*.]

5) U kojem omjeru težina treba da budu olovo od specifične težine 11·4 i pluto od specifične težine 0·24, ako hoćemo, da svezani baš posvema utonu u vodi?

6) Linearne brzine kod gibanja po krugu.

a) U kojem su omjeru linearne brzine Venere i Zemlje, ako je daljina Venere od Sunca 0·7 polumjera zemaljske staze, a ophodna su vremena obaju planeta 225 i 365 dana? (Staze se uzimlju za krugove.)

b) Kako se odnose linearne brzine (u svemirskom prostoru) jedne točke na ekvatoru o podne i o ponoći, ako se računa za polumjer zemlje 6370 kilometara, a za polumjer zemaljske staze 149·5 kilometara (staza se zemlje uzima opet kao krug)?

7) Konj vuče kola s otporom od 160 kilograma 6·25 kilometara, drugi konj vuče kola s otporom od 125 kilograma 4 kilometra daleko; u kojem su omjeru radnje obaju konja? [100 *kg*, 7·5 *km*, 120 *kg*, 8 *km*.]

8) Na decimalnoj su vagi (vagi s mostom) kraci donje poluge 7 i 42 centimetra, duži je krak gornje jednokrake poluge 6 centimetara; kako je dugačak kraći krak? [8 i 56 *cm*, 14 *cm*.]

9) Paralelne sile na dvokrakoj polugi.

a) Hvatišta su dviju sila od 3 i 4 kilograma 14 centimetara daleko jedno od drugoga; na kojem mjestu sastavnice tih hvatišta treba da djeluje sila od 7 kilograma, da se one dvije sile ukinu? [5 i 6 *kg*, 33 *cm*, 11 *kg*].

b) Silu od 44 kilograma treba ukinuti s dvije druge sile, od kojih je jedna 14 kilograma i ima hvatište, koje je 15 centimetara daleko od hvatišta resultante; gdje je hvatište druge komponente? [100 *kg*, 16 *kg*, 21 *cm*.]

10) Njihalo.

a) Ako je trajanje njihaja t jednoga njihala 0·9, a drugoga

0·6 sekunda, u kojem su omjeru dužine l tih njihala? [1·2, 1·6 sek.]

b) Za koliko bi minuta i sekunda na dan išla naprijed ura sa sekundnim njihalom za ekvator, gdje je dužina sekundnoga njihala $L = 0{\cdot}991$ metra, na mjestu, gdje je dužina sekundnoga njihala 0·997 metra?

c) Sekundno njihalo ide pravo u mjestu, gdje je dužina $L = 0{\cdot}9915$ metra; za koliko treba produžiti njihalo na mjestu, gdje to njihalo na dan ide naprijed 200 sekunda?

d) Sekundno je njihalo na površini morskoj dugačko 0·98765 metra; kolika mu je dužina pod istim stupnjem geografske širine u visini od 2000 metara, ako se uzme za polumjer zemlje 6370 kilometara? [0·9956 *m.* 5000 *m.*]

II. *Magnetizam zemaljski.*

11) a) Magnetična igla načini na nekom mjestu zemaljske površine u minuti 50 njihaja, na drugom 80; u kojem su omjeru jakosti zemaljskoga magnetizma na tim mjestima? [50, 150.]

b) U mjestu A je inklinacija 50° i totalna jakost zemaljskoga magnetizma 0·65; magnetički štap, koji visi horizontalno, načini u 9 minuta 117 njihaja; kolika je totalna jakost zemaljskoga magnetizma u mjestu B, gdje je inklinacija 60° i isti magnet načini u 8 minuta 112 njihaja? [60°, 0·45, 7 min., 105 njih., 70°, 11 min.]

III. *Elektriciteta.*

12) a) U kojem su omjeru jakosti dviju galvanskih struja, koje na tangentnoj busoli izvode otklone od 45° 30′ i 63° 50′? [45° 10′ i 71° 40′.]

b) Galvanska struja izvodi uz izvanji otpor od 79·07 Ohma na tangentnoj busoli otklon od 60° 50′; kolik otpor treba još uklopiti, da otklon bude samo 38° 20′, ako se ne obaziremo na unutrašnji otpor? [97·7 Ohma, 53° 50′, 44° 20′.]

c) Ako se u tečaj struje jednoga elementa uklopi samo tangentna busola, onda je izvanji otpor 0·137 Ohma i otklon 71° 20′; ako se još uklopi otpor od 0·411 Ohma, pokazuje se otklon od 57° 50′; kolik je unutrašnji otpor toga elementa? [0·512 Ohma, 36° 50′, 2·048 Ohma, 13° 20′.]

d) Galvanska struja ide kroz sulfat bakra i nitrat srebra; koliko će bakra izlučiti u vremenu, u kojem će izlučiti 12 grama srebra?

C. Kemija.

I. *Sastavci od dva elementa.*

13) a) Koliko se grama natrija sastavlja sa 71 gramom klora u kuhinjsku sol NaCl? [106·5 *gr.*]

b) Koliko je ugljika u 11 grama ugljikova dioksida CO_2? [27·5 *gr.*]

c) Koliko se litara kisika može dobiti, kada se grije 43·5 grama surca MnO_2, ako (uz temperaturu i tlak kod pokusa) 1·25 litara kisika važe jedan gram? [174 *gr.*]

II. *Sastavci od tri elementa.*

14) a) Koliko treba kaliumklorata $KClO_3$, da se dobije 24 litre kisika (1 litar $= \frac{4}{5}$ grama)? [$6\frac{6}{7}$ *l.*]

b) Koliko se željeza može rastopiti u 49 grama englezke sumporne kiseline?

c) Koliko će postati gašenoga vapna CaH_2O_2, ako se polije 28 kilograma žeženoga vapna CaO s vodom? [84 *kg.*]

D. Primjeri za aritmetički srednjak.

15) Tečajem se je dana 5 puta motrila temperatura uzduha. Zabilježene su temperature 4·3°, 7·2°, 15·9°, 14·4° i 8·7°. Kolika je srednja temperatura toga dana?

16) Tečajem se je dana barometar motrio 4 puta. Zabilježeni su tlaci 751·4, 751·3, 749·9 i 750·2 milimetara. Kolik je srednjak tih tlakova?

17) U laboratoriju određivalo je nekoliko đaka specifičnu težinu neke vrste mjedi (mesinga) i dobili su ove vrijednosti: 8·37, 8·32, 8·45, 8·39, 8·43 i 8·38. Što je srednja vrijednost za specifičnu težinu te mjedi?

18) Dohotci su nekoga činovnika bili u tri zasebične godine: 2734·60, 2793·24 i 2785·10 kruna. Kolik mu je prosječni dohodak?

19) Četvorica su mjerili dužinu željeznoga štapa s pomoću osobitoga stroja za mjerenje dužina. Mjerenja su dala: 1·7861, 1·7862, 1·7859 i 1·7862 metara. Kolik je srednjak tih mjerenja?

20) Uz normalni tlak uzduha (od 760 *mm*) važe jedna litra suhoga uzduha kod temperature 0°, 1°, 2° ... 10°: 1·293, 1·288, 1·283, 1·279, 1·274, 1·270, 1·265, 1·260, 1·256, 1·251 i 1·247 grama. Kolika je srednja težina jedne litre uzduha?

21) Tečajem dana mjerena je temperatura 6 puta. Zabilježene su temperature: $-1{\cdot}2°$, $-0{\cdot}3°$, $+1{\cdot}4°$, $+1{\cdot}7°$, $+0{\cdot}9°$ i $-0{\cdot}1°$; kolika je srednja temperatura toga dana?

22) S pomoću kišomjera (ombrometra) određena je u Zagrebu za godine 1881. do godine 1888. godišnja množina oborine ovako: 826·7, 967·5, 833·6, 878·4, 778·5, 904·9, 802·9 i 841·9 milimetara. Kolika je srednja množina oborine u tih 8 godina?

§. 19. Neki građanski računi.

I. $K = \frac{A \cdot P}{100}$; $K_n = \frac{A \cdot P \cdot n}{100}$.

II. $A_1 = A(1 + 0{\cdot}01 \cdot P)$; $A_n = A(1 + 0{\cdot}01P \cdot n)$.

III. $x = \frac{a}{a+b+c+\ldots} \cdot S$; $y = \frac{b}{a+b+c+\ldots} \cdot S$; i t. d.

IV. $x = \frac{Aa + Bb + Cc + \ldots}{A + B + C + \ldots}$.

A. Kamatni račun i postotni računi.

§. 19. A.

1) a) Koliko kamata daje 200 kruna uz 4% za 6 godina? [300 *K*, 5%, 7 god.]

b) Koliko kamata daje 630 kruna uz 3·75% za 2 godine i 8 mjeseci? [416 *K*, $3\frac{1}{3}$%, 3 g. i 9 mj.]

c) Do koje će glavnice narasti 500 kruna uz $3\frac{1}{2}$% za 8 godina? [600 *K*, 4·5%, 4 g. i 4 mj.]

2) a) Koji će kapital donijeti za 11 godina uz 3% 132 krune kamata? [12 g. 5%, 300 *K*.]

b) Koji kapital donese za 5 godina i 4 mjeseca uz 3·25% 52 krune kamata? [4 g. i 10 mj., 4·2%, 203 *K*.]

c) Koji kapital naraste za 16 godina uz $4\frac{1}{4}$% na 4200 kruna? [17 g. i 5 mj., $3\frac{3}{5}$%, 3254 *K*.]

3) a) Za koliko će godina donijeti 1600 kruna uz 5% 2000 kruna kamata? [2500 *K*, 4%, 3000 *K*.]

b) Za koliko će godina i mjeseci donijeti 46875 kruna uz $3\frac{1}{5}$% 7000 kruna kamata? [4096 *K*, $3\frac{1}{8}$%, 4000 *K*.]

c) Za koliko će godina narasti 4000 kruna uz $3\frac{3}{4}$% na 7000 kruna? [5000 *K*, $4\frac{1}{6}$%, 15000 *K*.]

4) a) Po koliko se postotaka (procenata) mora posuditi 800 kruna, ako treba da za 25 godina donesu 1000 kruna kamata? [625 *K*, 4 g. 100 *K*.]

b) Po koliko se procenata mora posuditi 3200 kruna, ako treba da za 4 godine i 2 mjeseca donesu 600 kruna kamata? [9375 *K*, 5 g. i 4 mj., 1600 *K*.]

5) Kapital od 5000 kruna uložen je po 4%, četiri godine poslije uložen je drugi kapital od 7200 kruna po 5% na kamate. Nakon kolikoga su vremena donijele obje glavnice jednake kamate?

6) Kapital od 4500 kruna donio je nakon određenoga vremena 2277 kruna kamata; $\frac{1}{3}$ toga vremena bio je posuđen po 5%, $\frac{1}{4}$ toga vremena po $4\frac{1}{3}$%, $\frac{1}{6}$ toga vremena po 4%, a ostatak vremena po 3·2%. Koliko je vremena bio posuđen?

7) A i B ukamatili su u isto doba svoje kapitale po $2\frac{1}{2}$%. B je imao za 2000 kruna manje nego A. No ipak se našlo, da je B nakon 20 godina imao kapitala i kamata zajedno toliko, koliko A nakon 10 godina. Koliki su bili njihovi kapitali?

---

8) Ako trgovac mora da proda robu za 3060 kruna, izgubi baš toliko postotaka, koliko bi ih dobio, da ju je prodao za 4140 kruna. Za koliko ju je kruna kupio?

9) Mjenica od 6000 kruna isplaćena je 15 mjeseci prije platežnoga roka sa 5400 kruna. Koliko se je postotaka diskonta računalo?

10) Trgovac kupi u tvorničara robe za 12800 kruna, te dobije $4\frac{3}{4}$% rabatta od stotine. Kolik je rabatt i koliko je platio u gotovom?

11) Drugi je trgovac takodjer kupio robe za 12800 kruna, ali je na svaku stotinu robe dobio još za $4\frac{3}{4}$ kruna robe (t. j. platio je za svakih $104\frac{3}{4}$ krune robe samo 100 kruna, a to znači, da je dobio $4\frac{3}{4}$% rabatta na stotinu). Kolik je rabatt i kolika je isplata u gotovom?

12) Netko ima da isplati u 4 roka svagda nakon n godina kapital od k kruna. Koliko može sada isplatiti, ako se na godinu diskontira p% na stotinu?

13) a) Ako državni papir stoji na $97\frac{3}{4}$% (100 = pari), koliko je a kruna toga papira vrijedno u gotovu novcu?

b) Koliko se toga papira dobije za b kruna?

14) Ako akcije neke željeznice, koja na godinu nosi 10% čistoga dobitka, stoje na 168 (100 = pari), po koliko procenata ukamaćujemo svoj novac, ako kúpimo tih akcija?

15) Tvorničar proda robe za neku određenu svotu sa 8% rabatta od stotine i dobije kao gotovu isplatu 8050 kruna. Što je bila cijena robi?

16) Primio sam za nekoga $5206\frac{1}{2}$ kruna, koje sam mu trebao da

pošaljem poštom. Poštarina je bila $^1/_8$ procenata, platio sam ju i njemu odračunao. Koliko sam mu morao poslati?

17) Trgovac dobije za 880 kruna u gotovu novcu robe sa $8^3/_4$ procenata rabatta na stotinu. Koliko bi bio morao platiti bez toga rabatta?

18) Netko plati za svotu, koju bi morao tek iza godine dana isplatiti, odmah $1538^1/_2$ kruna sa $9^1/_2$ po sto diskonta. Koliko je bio dužan?

19) Trgovac osjegura robe za 14100 kruna, koja mu dolazi preko mora, i plati kao premiju 6 po sto. No da ne dobije natrag samo robu nego i premiju unaprijed plaćenu, ako bi mu roba stradala, označio je vrijednost robe nešto većom. Koliku će premiju morati platiti?

---

§. 19. B.

20) A, B, C i D kupe srećku. A dade 24 krune, B 38 kruna i 50 filira, C 20 kruna, D 39 kruna. Srećka se izvuče sa zgoditkom od 30000 kruna, no od toga treba da se plati blagajni 16%. Koliko će svaki dobiti?

21) Razdijeli 1024 kilograma tako na 4 dijela, da se oni odnose kao 2 : 3 : 4 : 7.

22) U prahu idu na 1000 dijelova salitre 153 dijela sumpora i 178 dijelova ugljena. Koliko kilograma salitre, sumpora i ugljena ima u 1000 kilograma praha?

23) U neki posao dade A 4000 kruna na 5 mjeseci, B 3000 kruna na 8 mjeseci, C 6000 kruna na 6 mjeseci. Koliko ide svakoga od dobitka, koji je za svu trojicu zajedno bio 800 kruna?

24) 630 kruna treba razdijeliti među četiri osobe tako, da svaka dobije 25 kruna više od predašnje. Koliko dobije svaka?

25) U trokutu se odnose kuti kao 1 : 2 : 3. Koliko stupanja ima svaki kut?

26) Voda se može s pomoću galvanske struje rastaviti na vodik i kisik, pa 18 dijelova težine daje 2 dijela težine vodika i 16 dijelova težine kisika. Koliko grama kisika možeš dobiti iz litre vode?

27) Četiri brata od 12, 14, 16 i 18 godina treba da razdijele među sebe svotu od 1050 kruna u omjeru njihove starosti. Koliko će kruna dobiti svaki?

28) Netko ostavi nešto prije svoje smrti udaljenoj udovici i njezinom djetetu legat od 3800 kruna. Kako nije znao, je li dijete sin ili kći, odredio je, da mati dobije $^2/_5$, a dijete $^3/_5$ legata, ako je dijete sin; ima li pak mati kćer, neka dobije obratno mati $^3/_5$, a kći $^2/_5$ legata. Nakon upita saznaše, da baštinica ima dvoje djece, sina i kćer. Kako treba da se razdijeli legat prema posljednjoj volji oporučitelja?

29) Tri seljaka najme livadu za 180 kruna svomu blagu za pašu. A tjera određen broj komada blaga 12 nedjelja, B 11 komada više nego A 10 nedjelja, a C napokon 50 komada 13 nedjelja na pašu. Ako C plati $97^1/_2$ kruna, koliko mora da plati A, a koliko B?

30) K zajedničkom objedu dade Cajo 7, a Sempronije 8 zdjela, svaka iste vrijednosti. Prije nego što počeše blagovati, dođe Tito i sjedne k stolu. Kad je pojeo, plati 30 srebrnjaka i razdijeli ih među Caja i Sempronija po omjeru donesenih zdjela; prvomu je platio 14, a drugomu 16 srebrnjaka. Sempronije, nezadovoljan tijem, zaište sudačku odluku. Kako ta glasi?

---

§. 19. C.

31) Netko ima da plati 2007 kruna nakon 5 mjeseci, 3395 kruna nakon 7 mjeseci, 6740 kruna nakon 13 mjeseci. Nakon koliko mjeseci treba da plati cijelu svotu?

32) Netko ima da plati 3 svote, i to 1013 kruna nakon $3^1/_2$ mjeseca, 431 krunu 4 mjeseca poslije i posljednju svotu napokon opet 4 mjeseca poslije. Kolika je ta posljednja svota, ako on može sve tri svote isplatiti nakon $6^1/_4$ mjeseci, da nema ni koristi ni štete?

33) Netko je dužan da plati 1980 kruna nakon $5^1/_2$ mjeseci; no buduć da ne može na jedan put isplatiti tu svotu, plati on nakon 3 mjeseca 440 kruna, $1^1/_2$ mjeseca poslije toga 550 kruna i opet 2 mjeseca kasnije 770 kruna. Kako dugo smije ostatak od 220 kruna pridržati?

34) Netko preuzme posao s pogodbom, da će nakon 10 mjeseci isplatiti određenu svotu. On se pogodi s vlasnikom posla, da će mu nakon nekoga vremena u 4 roka od 3 do 3 mjeseca svaki put četvrt svote isplatiti. Nakon koliko će mjeseci biti prva isplata?

35) Netko kupi kuću za 18900 kruna s pogodbom, da će tu svotu nakon 15 mjeseci isplatiti. On se s prodavaocem pogodi, da će

*

nakon 3 mjeseca otplatiti 2100 kruna, a poslije toga u 5 jednakih rokova svagda po 3360 kruna. O kojim će rokovima biti te otplate?

36) Netko ima da plati 2000 kruna nakon 14 mjeseci; on se pogodi s vjerovnikom, da će dug isplatiti u 5 rokova, a svaki od njih bit će $1^1/_4$ mjeseca duži od cijeloga pređašnjega roka; o prvom će roku otplatiti 200 kruna, a o svakom kasnijem po 100 kruna više. Nakon koliko vremena treba da bude prvi rok, da ne bude ni štete ni koristi ni jednomu od njih?

---

§. 19. D.

37) Trgovac ima dvije vrste duhana; nova funta ($= {}^1/_2$ kg) prve stoji 2 krune, a druge 1·20 kruna. On hoće da smiješa obje vrste tako, da može funtu prodavati po 1·70 kruna bez štete i koristi. Koliko mora uzeti od svake vrste, da dobije 64 funte?

38) Netko hoće da smiješa dvije vrste vina u omjeru 3 : 2. Hektolitar jedne vrste stoji 144 krune. Koliku cijenu mora udariti drugoj vrsti, da dobije vino, kojega će hektolitar stajati 126 kruna.

39) Kako glasi riješenje pređašnje zadaće, ako se mjesto brojeva 3, 2, 144 i 126 metnu slova a, b, m i p i u kojem je slučaju nemoguće riješenje zadaće?

40) Iz spirita od p_1 i p_2 postotaka treba miješanjem načiniti m litara spirita od p_3 postotaka. Koliko se litara mora uzeti od svake vrste?

a) $p_1 = 80$, $p_2 = 50$, $m = 12$, $p_3 = 60$;
b) $p_1 = 95$, $p_2 = 65$, $m = 7$, $p_3 = 90$.

41) Koliko litara vode treba izvući iz m litara spirita od p_1 postotaka, da preostali spirit ima p_2 postotaka?

a) $m = 84$, $p_1 = 70$, $p_2 = 90$;
b) $m = 78$, $p_1 = 54$, $p_2 = 72$.

42) Od zlata sa sadržajem 900 tisućina i 600 tisućina, treba sastaviti 150 grama zlata sa sadržajem 800 tisućina. Koliko grama treba da se uzme od svake vrste?

43) Riješi pređašnju zadaću, ako mjesto brojeva 900, 600, 150 i 800 metneš slova a, b, m i c.

Bilješka. Prije se je sadržaj zlata kazivao u karatima. Zlato od 18 karata bilo je, koje je imalo u polovini funte (= 16 loti) ili jednoj marki (à 24 karata) 18 karata čistoga zlata i samo 6 karata dodataka. Sada se

za jedinicu težine kod kovanja zlatnoga i srebrnoga novca uzima jedna nova funta ($= {}^1/_2$ kilograma), a sadržaj se zlata i srebra kazuje u tisućinama. Prema tomu je zlato (a i srebro) od sadržaja 900 tisućina, koje u 1000 dijelova ima 900 dijelova čistoga zlata i 100 dijelova dodataka.

44) Koliko grama srebra sa sadržajem a tisućina treba dodati k m grama srebra sa sadržajem b tisućina, da slitina ima sadržaj c tisućina?

a) $a = 600$, $m = 80$, $b = 900$, $c = 700$;
b) $a = 480$, $m = 98$, $b = 960$, $c = 720$.

45) Iz zlata od a karata i zlata od b karata treba sastaviti m grama zlata od c karata. Koliko grama treba uzeti od svake vrste?

a) $a = 16$, $b = 10$, $m = 200$, $c = 14$;
b) $a = 22$, $b = 8$, $m = 120$, $c = 16$.

46) Koliko grama srebra od a loti treba dodati k m grama srebra od b loti, da slitina bude od c loti?

a) $a = 10$, $m = 60$, $b = 16$, $c = 12$;
b) $a = 8$, $m = 80$, $b = 14$, $c = 9$.

47) Od alkohola specifične težine s_1 treba dodavanjem vode načiniti m cm³ alkohola specifične težine s_2. Koliko treba alkohola i koliko vode?

a) $s_1 = 0{\cdot}7$, $m = 800$, $s_2 = 0{\cdot}9$;
b) $s_1 = 0{\cdot}75$, $m = 700$, $s_2 = 0{\cdot}8$.

48) Netko ima dvije vrste dušične kiseline specifičnih težina s_1 i s_2 i hoće da načini miješanjem m cm³ dušične kiseline, koja ima specifičnu težinu s_3. Koliko cm³ mora da uzme od svake vrste?

a) $s_1 = 1{\cdot}5$, $s_2 = 1{\cdot}2$, $m = 200$, $s_3 = 1{\cdot}4$;
b) $s_1 = 1{\cdot}48$, $s_2 = 1{\cdot}22$, $m = 390$, $s_3 = 1{\cdot}4$.

49) Žuta mjed (mesing) je slitina od bakra (spec. tež. 8·8) i cinka (spec. tež. 7·2). Koliko cm³ obiju kovina ima u m cm³ mesinga specifične težine s?

a) $m = 200$, $s = 7{\cdot}8$; b) $m = 500$, $s = 8{\cdot}2$.

50) Tuč (bronca) je slitina bakra i kositra (spec. tež. 7·3). Koliko cm³ obiju kovina ima u m cm³ tuči specifične težine s?

a) $m = 100$, $s = 8$; b) $m = 600$, $s = 7{\cdot}8$.

51) Slitina je sastavljena od a grama srebra (spec. tež. 10·5) i b grama bakra (spec. lež. 8·8). Kolika je specifična težina slitine?

a) $a = 96{\cdot}5$, $b = 4$; b) $a = 43{\cdot}1$, $b = 6{\cdot}4$.

51) Woodova je slitina sastavljena po težini od 1 dijela kadmija, 2 dijela kositra, 2 dijela olova i 4 dijela bismuta. Kolika je specifična težina slitine, ako je spec. tež, kadmija = 8·6, olova = 11·3 i bismuta = 9·8?

§. 20. Jednadžbe prvoga stupnja (linearne jednadžbe) s više nepoznanica u aritmetičkom govoru.

A. Vježbe za metode eliminacije.

§. 20. B. C.

I. Metoda supstitucije.

1) a) $\left|\begin{array}{l} x = 8 - 2y \\ 3x + 5y = 21 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x + 3y = 19 \\ 10x - 7y = 5 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} x - 4y + 22 = 0 \\ 6x + 7y - 85 = 0 \end{array}\right|$

2) a) $\left|\begin{array}{l} x = y - 3 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ 4y - 3x - 8 = 0 \end{array}\right|$

3) a) $\left|\begin{array}{l} 2x = 18 - 3y \\ 6x + 5y = 38 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 3x - 5y = -15 \\ 12x - 7y = 18 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 4x + 5y - 68 = 0 \\ 20x - 21y + 28 = 0 \end{array}\right|$

4) a) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y - 3 = 10 \\ 21y - 4x - 55 = 0 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 4x - 5y - 3 = 0 \\ 8x + 2y - 66 = 0 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 3x - 5y = 2 \\ 4x + 7y = -93 \end{array}\right|$

5) a) $\left|\begin{array}{l} x : y = 1 : 2 \\ 3y + 4x - 10a = 0 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x : y = 3 : 4 \\ 2x + 7y = 2y - 3x + 35b \end{array}\right|$

6) a) $\left|\begin{array}{l} 8x - 2y = 3y + 6 \\ 6y + 4x - 100 = 49 - 4y - 3x \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 13a + 12b \\ 2y + x = 8a + 7b \end{array}\right|$

7) a) $\left|\begin{array}{l} x = a - by \\ cx + dy = \dfrac{ad}{b} \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x - ay = b \\ ax + cy = ab \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} ax + by - c = 0 \\ abx + cy - bc = 0 \end{array}\right|$

II. Metoda komparacije.

8) a) $\left|\begin{array}{l} x = 5 - 2y \\ x = 7 - 3y \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} y - 4x = -13 \\ y - 5x = -17 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} x - 7y + 37 = 0 \\ x + 8y - 53 = 0 \end{array}\right|$

9) a) $\left|\begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 5 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} y - x = 1 \\ 2x + y = 10 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} x + 2y = 10 \\ x - y = 1 \end{array}\right|$

10) a) $\left|\begin{array}{l} y - 2x = 3 \\ y + 3x = 13 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2x + y = 31 \\ y - x = 4 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 46 \\ x + y = 18 \end{array}\right|$

11) a) $\left|\begin{array}{l} 4x + y = 23 \\ 3x - 2y = 9 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 3x + 5y = 94 \\ 2x - y = 15 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} 4x + 3y = 81 \\ 2y - x - 21 = 0 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} 7x + 4y - 95 = 0 \\ 2y - x + 4 = 11 \end{array}\right|$

12) a) $\left|\begin{array}{l} 2x = 38 - 3y \\ 2x = 54 - 5y \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 3x - 4y = 11 \\ 5x - 4y = 29 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} 7x - 8y - 62 = 0 \\ 7x + 8y - 78 = 0 \end{array}\right|$

13) a) $\left|\begin{array}{l} 2x + y = 2a + 2b \\ 6x - y = 6a - 2b \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 5a - 2b + 3c \\ x - 2y = -a - b - 2c \end{array}\right|$

14) a) $\left|\begin{array}{l} x : y = 4 : 5 \\ 6y + 2x - 113 = 1 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2y : x = 10 : 7 \\ x - 3y + 30 = 6 \end{array}\right|$

15) a) $\left|\begin{array}{l} x = a^2 + b^2 - by \\ x = a(a + b) - ay \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x - ay = b^2 \\ y + 2by = (a + b)^2 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} ax + by = a^2 + b^2 \\ ax - cy = a^2 - bc \end{array}\right|$

III. Metoda adicije i suptrakcije.

16) a) $\left|\begin{array}{l} x + y = 14 \\ x - y = 2 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 13 \\ 2x + 2y = 10 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} 3x - 5y = -13 \\ 6y - 3x = 18 \end{array}\right|$

17) a) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \\ 9x - 4y = 1 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 4x + 5y = 31 \\ 7x - 6y = 10 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} 6x - 7y - 1 = 0 \\ 7x + 8y - 82 = 0 \end{array}\right|$

18) a) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 41 \\ 3x - 2y = 3 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 4x + 2y - 6x = 2 \\ 7x - 5y - 15 = 0 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 3x + 5y + 84 = 0 \\ 9x + 7y = 84 \end{array}\right|$

19) a) $\left|\begin{array}{l} x + y = 2a \\ x - y = 2b \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x + 2y = 8a - b \\ 2y - 3x = -13b \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} ax + by = a^2 + b^2 \\ ax - by = (a + b)(a - b) \end{array}\right|$

20) a) $\left|\begin{array}{l} ax + by = a^2 \\ cx - dy = ae \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} bx + cy = a \\ dx + ey = \dfrac{ae}{c} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} cx - dy = d - c \\ a^2x + b^2y + 2ab = \dfrac{(bc + ad)^2}{cd} \end{array}\right|$

IV. *Metoda neodređenih koeficijenata.*

21) a) $\left|\begin{array}{l} 5x + 7y = 92 \\ 19x - 12y = 118 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 8x - 3y = 34 \\ 11x + 4y = 63 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 13x + 24y = 124 \\ 15x - 16y = 12 \end{array}\right|$

22) a) $\left|\begin{array}{l} 9x - 7y = 145 \\ 17x - 19y = 245 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 17x - 13y = 144 \\ 23x + 19y = 890 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 5x - 7y = 20 \\ 9x - 11y = 44 \end{array}\right|$

B. Primjeri s dvije nepoznanice.

23) a) $\left|\begin{array}{l} 3x + 2y = 2x + 3y + 5 \\ 7x - 6y = 6x - 7y + 21 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 4x + 3y = 5x + 4y + 14 \\ 3x + 8y = 2x + 9y - 20 \end{array}\right|$

24) a) $\left|\begin{array}{l} 9x + 8y = 8x + 9y + 37 \\ 5x - 11y = 4x - 12y + 43 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 7x + 13y = 8x + 14y - 3\frac{1}{2} \\ 9x - 16y = 10x - 17y + 1\frac{1}{2} \end{array}\right|$

Prije eliminacije treba ukloniti razlomke:

25) a) $\left|\begin{array}{l} 3{\cdot}5x + 4{\cdot}7y = 21{\cdot}1 \\ 2{\cdot}1x + 2{\cdot}9y\frac{3}{5} = 12{\cdot}9 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 17{\cdot}2x - 13{\cdot}7y = 31{\cdot}2 \\ 12{\cdot}5x - 11{\cdot}4y = 16{\cdot}9 \end{array}\right|$

26) a) $\left|\begin{array}{l} 3{\cdot}4x - 2{\cdot}3y = 0{\cdot}9 \\ 6{\cdot}7x - 4{\cdot}2y = 4{\cdot}1 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 3{\cdot}2x - 5{\cdot}8y = -4{\cdot}86 \\ 4{\cdot}6x - 3{\cdot}2y = 0{\cdot}72 \end{array}\right|$

27) a) $\left|\begin{array}{l} 2{\cdot}3x - 3{\cdot}2y + 0{\cdot}22 = 0 \\ 0{\cdot}3x - 0{\cdot}4y + 0{\cdot}02 = 0 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2{\cdot}3x + 2{\cdot}74y = 28{\cdot}512 \\ 9{\cdot}2x + 6{\cdot}85y = 84{\cdot}045 \end{array}\right|$

28) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 2 \\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{2}{5}x - \frac{1}{6}y = 1 \\ \frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y = 9 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} \frac{6}{7}x + \frac{7}{8}y = 13 \\ \frac{5}{7}x - \frac{3}{8}y = 2 \end{array}\right|$

29) a) $\left|\begin{array}{l} 2\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{4}y = 45\frac{7}{12} \\ 4\frac{1}{5}x + 1\frac{1}{7}y = 39\frac{24}{35} \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}y = 35 \\ 3\frac{3}{5}x - 3\frac{1}{3}y = 9\frac{1}{3} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 3\frac{1}{4}x + 4\frac{2}{3}y = 84\frac{2}{3} \\ 2\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{4}y = 36\frac{1}{20} \end{array}\right|$

Prije eliminacije treba riješiti zagrade:

30) a) $\left|\begin{array}{l} 2(x + 5) = 3(y + 3) \\ 3(x + 2) = 2(y + 6) \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 5(x + 1) = 4(y + 9) \\ 4(x - 2) = 5(y + 3) \end{array}\right|$

31) a) $\left|\begin{array}{l} 3(x + 3) - 2(y + 2) = 0 \\ 5(x - 3) - 4(y - 8) = 0 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 9(x - 9) - 11(y - 21) = 0 \\ 11(x - 11) - 9(y - 19) = 0 \end{array}\right|$

32) a) $\left|\begin{array}{l} 2(3x + y + 1) = 3(x + 5y - 3) \\ 3(x - 7y + 11) = 2(5x - 9y - 4) \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 5(x - 2y + 4) = 7(2x + 3y - 1) \\ 8(2x + y - 3) = 3(x - 4y + 5) \end{array}\right|$

33) a) $\left|\begin{array}{l} 9(x + 1) + 10(y - 1) = 57 \\ 6(x + 1) - 5(y - 1) = 3 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 8(x - 2) + 3(y + 5) = 23 \\ 12(x - 2) - 5(y + 5) = -13 \end{array}\right|$

34) a) $\left|\begin{array}{l} (x + 5)(y - 3) = xy + 2 \\ (x - 1)(y + 3) = xy + 22 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} (5x - 7)(7y - 5) = 35xy - 39 \\ (7x - 5)(5y + 7) = 35xy - 11 \end{array}\right|$

Jednadžbe i proporcije.

35) a) $\left|\begin{array}{l} x + y = 10 \\ x : y = 2 : 3 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x : y = 7 : 5 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} 5x + 7y = 62 \\ x : y = 2 : 3 \end{array}\right|$

36) a) $\left|\begin{array}{l} 7x - 5y = 2 \\ x : y = 3 : 4 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 56 \\ x : y = 3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{3} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 3x - 4y + 5\frac{17}{20} = 0 \\ x : y = 5\frac{3}{4} : 4\frac{4}{5} \end{array}\right|$

37) a) $\left|\begin{array}{l} x : y = 2 : 3 \\ (x - 1) : (y + 1) = 3 : 5 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x : y = 4 : 9 \\ (x + 2) : (y + 7) = 3 : 7 \end{array}\right|$

38) a) $\left|\begin{array}{l} (x + 1) : (y + 1) = 3 : 4 \\ (x - 1) : (y - 1) = 2 : 3 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} (x + 1) : (y - 1) = 4 : 5 \\ (x - 1) : (y + 1) = 1 : 2 \end{array}\right|$

39) a) $\left|\begin{array}{l} (x - 1) : (y + 1) = (x - 2) : (y - 1) \\ (x + 2) : (y - 2) = (x + 6) : (y + 3) \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} (x + 1) : (y + 1) = (x - 3) : (y - 4) \\ (x - 2) : (y - 1) = (x + 1) : (y + 3) \end{array}\right|$

40) a) $x : y : (x + 4) = 1 : 2 : 3$; b) $(x - 1) : y : (x + 7) = 1 : 2 : 3$.

41) a) $(x+1):(y-1):(y+1)=4:5:6$;
b) $(x-2):(y-3):(y+1)=3:5:7$.

42) a) $\left|\begin{array}{l} ax+by=2ab \\ x:y=b:a \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x:y=a:b \\ (x+a):(y+b)=a^2:b^2 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} x:y=m:n \\ (x-m):(y-n)=m^2:n^2 \end{array}\right|$

Riješi još ove sisteme jednadžbi:

43) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{12}-\frac{y}{15}=2 \\ \frac{x}{15}+\frac{y}{12}=7\frac{3}{4} \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{18}-\frac{y}{24}=1 \\ \frac{x}{24}+\frac{y}{18}=7 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{4}-\frac{y}{9}=4 \\ \frac{x}{7}-\frac{y}{3}=-5 \end{array}\right|$

44) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{2x+1}{y}=1 \\ \frac{3y-1}{x}=7 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{7x+5}{y}=3 \\ \frac{5y-7}{x}=13 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} \frac{3x+y-8}{4}=4 \\ \frac{5x-3y-5}{3}=7 \end{array}\right|$

45) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{4x-1}{3}+\frac{5y+1}{4}=5\frac{1}{6} \\ \frac{3x+7}{4}+\frac{2y+9}{3}=7\frac{2}{3} \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{2x+7}{9}-\frac{11y-8}{4}=5 \\ \frac{5x-2}{6}+\frac{5y-8}{4}=6 \end{array}\right|$

46) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{7x-y+2}{2}-\frac{3x+9y-1}{5}=7 \\ \frac{9x+2y+3}{3}+\frac{5x-y+14}{8}=10 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} \frac{4x-5y+12}{6}-\frac{7x-8y+4}{7}=1 \\ \frac{5x-4y+7}{4}+\frac{6x+y-4}{10}=7 \end{array}\right|$

47) a) $\left|\begin{array}{l} x-\frac{4x+7}{3}-\frac{3x+5y}{17}-5y+17=0 \\ \frac{x+1}{6}-\frac{22-6y}{3}=\frac{8y+5}{18}-\frac{5x-7}{11} \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} \frac{12x+7y+28}{6}-\frac{15-3x}{4}=\frac{12y+11}{3}-\frac{4y-17+x}{12}-13x \\ \frac{15x-3y-5}{8}-\frac{9x+18}{4}=\frac{7x+y-10}{15}-\frac{12+5y-6x}{5} \end{array}\right|$

48) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{2}{x+3}=\frac{3}{y+4} \\ \frac{4}{x-1}=\frac{5}{y-3} \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{2}{3x+4}=\frac{5}{6y+4} \\ \frac{3}{x-5}=\frac{4}{y-7} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{3}{4x+5}=\frac{4}{13y-5} \\ \frac{5}{6x-5}=\frac{6}{13y+1} \end{array}\right|$

49) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{x+2}{y+3}=\frac{3}{4} \\ \frac{x+4}{y+5}=\frac{5}{6} \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{2x+3}{3y+4}=0{\cdot}7 \\ \frac{x+5}{y+6}=\frac{7}{8} \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} \frac{7-6x}{8-7y}=\frac{1\,1}{1\,3} \\ \frac{9-8x}{10-9y}=\frac{1\,5}{1\,7} \end{array}\right|$

50) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=b+c \\ \frac{x}{b}-\frac{y}{c}=a-b \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{ax}{b}+\frac{cy}{d}=a^2+c^2 \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{c}=b-d \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{bx}{a}-\frac{dy}{c}=bc-d^2 \\ \frac{ax}{c}+\frac{cy}{d}=a^2+c^2 \end{array}\right|$

51) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b} \\ \frac{c-x}{d-y}=\frac{c-a}{d-b} \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{a+bx}{c+dy}=\frac{a}{c} \\ \frac{e-fx}{g-hy}=\frac{d(be+2af)}{b(dg+2ch)} \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} \frac{ab+cx}{de+fy}=\frac{ab}{de+f} \\ \frac{bc+dy}{ef-gx}=\frac{bc-d}{ef} \end{array}\right|$

Riješi sisteme jednadžbi, što dolaze, u kojima su nepoznanice **samo** u nazivniku:

52) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-8=0 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-2=0 \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} \frac{8}{x}+\frac{25}{y}-9=0 \\ \frac{8}{x}-\frac{25}{y}+1=0 \end{array}\right|$

53) a) $\left|\begin{array}{l}\frac{7}{x}-\frac{3}{y}=4\\ \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=3\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=2\\ \frac{25}{x}-\frac{12}{y}=3\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}\frac{6}{x}-\frac{5}{y}-8=0\\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y}-27=0\end{array}\right|$

54) a) $\left|\begin{array}{l}3x+4y=xy\\ 12x-8y=xy\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}30x+8y=7xy\\ 21x-6y=2xy\end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l}7x+5y=6xy\\ 5x+7y=7\frac{5}{7}xy\end{array}\right|$

55) a) $\left|\begin{array}{l}\frac{4}{x+3}+\frac{9}{y+2}=5\\ \frac{4}{x+3}-\frac{9}{y+2}=-1\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-2}=2\\ \frac{1}{x-1}-\frac{1}{y-2}=0\end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l}\frac{6}{x+2}-\frac{5}{y-1}=8\\ \frac{5}{x+2}-\frac{6}{y-1}=8\frac{1}{2}\end{array}\right|$

56) a) $\left|\begin{array}{l}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=a+1\\ \frac{b}{x}+\frac{a}{y}=\frac{a}{b}+b\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x+a}+\frac{1}{y+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\\ \frac{1}{x+a}-\frac{1}{y+b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\end{array}\right|$

57) a) $\left|\begin{array}{l}a_1x+b_1y=xy\\ a_2x-b_2y=xy\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}a_1x+b_1y=c_1xy\\ a_2x+b_2y=c_2xy\end{array}\right|$

Primjeri s tri i četiri nepoznanice.

58) a) $\left|\begin{array}{l}x+y=5\\ x+z=4\\ y+z=3\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}x+y=11\\ y+z=9\\ x+z=10\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}x+y=23\\ y+z=25\\ x+z=24\end{array}\right|$

59) a) $\left|\begin{array}{l}x+y=12\frac{5}{6}\\ x+z=14\frac{3}{4}\\ y+z=16\frac{7}{12}\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}x-y=4\\ x+z=9\\ y-z=5\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}x-y=1{\cdot}4\\ x+z=2{\cdot}8\\ y-z=1{\cdot}5\end{array}\right|$

60) a) $\left|\begin{array}{l}x+y-z=27\\ x-y+z=11\\ -x+y+z=-5\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}y+z=10\frac{1}{12}-x\\ x-z=5\frac{1}{12}-y\\ x-y=3\frac{5}{12}-z\end{array}\right|$

61) a) $\left|\begin{array}{l}2x+3y=13\\ 3y+4z=25\\ 4z+5x=26\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}3x+4y=25\\ 5y+6z=50\\ 7z+8x=59\end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l}4x-5y=3500\\ 6y-7z=530\\ 9x-8z=8920\end{array}\right|$

62) a) $\left|\begin{array}{l}x+y+z=15\\ 5x=4y\\ 6y=5z\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}x+y+z=39\\ 13x=10y\\ 16y=13z\end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l}x+y+z=81\\ 27x=17y\\ 37y=27z\end{array}\right|$

63) a) $\left|\begin{array}{l}2x+3y-4z=-3\\ y=5x-7\\ z=7x-10\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}3x-4y+5z=18\\ x=4z-17\\ y=5z-21\end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l}5y+4z-7x=-44\\ z=5y-33\\ x=5y-22\end{array}\right|$

64) a) $\left|\begin{array}{l}1{\cdot}2x+3{\cdot}4y=8\\ 5{\cdot}6x+7{\cdot}8z=97\\ z+9x=20\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}2{\cdot}3x+4{\cdot}5y=25\\ 6{\cdot}7y+8{\cdot}9z=29\\ 10{\cdot}11x-0{\cdot}55z=50\end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l}3{\cdot}4x-5{\cdot}6y=-10\\ 7{\cdot}8y-9{\cdot}1z=65\\ 1{\cdot}2x-3{\cdot}4z=2\end{array}\right|$

65) a) $\left|\begin{array}{l}1\frac{1}{2}x+2\frac{2}{3}y=11\\ 3\frac{2}{3}y+4\frac{3}{4}z=30\\ 3\frac{1}{4}z-\frac{1}{2}x=12\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}3\frac{4}{5}x+4\frac{5}{6}y=48\\ 1\frac{2}{3}y+5\frac{6}{7}z=51\\ 3\frac{5}{7}z-1\frac{3}{5}x=18\end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l}4\frac{5}{6}x+3\frac{4}{5}y=115\\ 10\frac{1}{12}x+8\frac{9}{10}z=309\\ 13\frac{1}{16}y+18\frac{9}{20}z=588\end{array}\right|$

66) a) $\left|\begin{array}{l}x+y+z=27\\ x-y+z=11\\ -x+y+z=-5\end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l}7x+y=24-5z\\ 3x+z=10-2y\\ 3y+8z=31-x\end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l}9x-5y+2z=1\\ 7x+6y-z=\frac{1}{5}\\ 2x+y+3z=3\frac{1}{5}\end{array}\right|$

67) a) $\left|\begin{array}{l}7(x+2)-6(y+1)=13-5(z+3)\\ 5(x+3)+7(y+2)=22+6(z+1)\\ x-y-z=4\end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 3(x-y)+4z+1=0 \\ 5(x-z)-7y-10=0 \\ 7(y-z)+5x-12=0 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} 7(x+y)+5(x+z)=64-3(y+z) \\ 5(x-y)+3(x-z)=18-7(y+z) \\ 3x+7y+5z=28 \end{array}\right|$

68) a) $\left|\begin{array}{l} 2x+3y+5z=29 \\ 3x+5y+2z=34 \\ 5x+2y+3z=37 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 7x+8y+9z=59 \\ 8x+9y+7z=54 \\ 9x+7y+8z=55 \end{array}\right|$

69) a) $\left|\begin{array}{l} 3x+4y+5z=46 \\ 5x+6y+7z=58 \\ 7x+8y+9z=76 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} 2x+5y=14-8z \\ 6y+9z=24-3x \\ 7z+6x=32-4y \end{array}\right|$

70) a) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=11 \\ x:y:(z+1)=1:2:3 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} x-y+z=4 \\ (x+1):(y-1):(z-2)=3:4:5 \end{array}\right|$

71) a) $\left|\begin{array}{l} 4x+3y+2z=55 \\ (x+1):(y+1):(z+1)=1:2:3 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 3x-7y+4z=30 \\ (x-2):(y+1):(z+4)=2:1:3 \end{array}\right|$

72) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{5}=11 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=15 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=3 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{4}+\frac{y}{5}=\frac{z}{7}+2 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=6 \\ \frac{y}{5}-\frac{z}{7}=\frac{x}{4}-2 \end{array}\right|$

73) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=66 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=53 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=67 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{5}+\frac{y}{6}=82+\frac{z}{4} \\ \frac{x}{4}+\frac{z}{6}=62+\frac{y}{5} \\ \frac{y}{4}+\frac{z}{5}=24+\frac{x}{6} \end{array}\right|$

74) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{x-1}{3}+\frac{y-1}{5}=4 \\ \frac{x+1}{4}+\frac{z-1}{3}=6 \\ \frac{y+1}{3}+\frac{z-3}{5}=2 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{x+2}{3}-\frac{y-1}{4}=1 \\ \frac{x+1}{5}+\frac{z+2}{2}=5 \\ \frac{y+1}{3}-\frac{z-1}{5}=1 \end{array}\right|$

75) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{x-1}{5}+\frac{y+1}{3}+\frac{z+2}{4}=7 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=2 \\ \frac{x+2}{4}+\frac{y+2}{5}-\frac{z-1}{3}=1 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} \frac{x+1}{2}+\frac{y+2}{3}=10-\frac{z+3}{4} \\ \frac{x-2}{5}+\frac{z-1}{4}=3+\frac{y+2}{6} \\ \frac{y-2}{2}+\frac{z-3}{5}=5-\frac{x-1}{3} \end{array}\right|$

76) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=8 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=24 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=12 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5-\frac{1}{z} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{z}=9-\frac{1}{y} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}-1 \end{array}\right|$

77) a) $\left|\begin{array}{l} \frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=38 \\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z}=35 \\ \frac{5}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=35 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{6}{z}+1 \\ \frac{3}{x}+\frac{4}{z}=\frac{5}{y}+2 \\ \frac{7}{y}-\frac{3}{z}=\frac{6}{x}-2 \end{array}\right|$

78) a) $\left|\begin{array}{l} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x+y=2a \\ y+z+2c \\ z+x=2b \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} x-y=b-a \\ y-z=c-b \\ x+z=a+2b+c \end{array}\right|$

79) a) $\left|\begin{array}{l} ax+by=b^2 \\ by+cz=b^2+c^2 \\ cz+dx=c^2 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} ax+by=0 \\ cy+dz=c \\ ez+fx+\frac{bf}{a}=0 \end{array}\right|$

c) $\begin{vmatrix} ax - by = 0 \\ cy - dz = ac - d \\ ez - fx = e - bf \end{vmatrix}$

80) a) $\begin{vmatrix} \frac{ax}{b} + \frac{by}{c} + \frac{cz}{a} = a + b + c \\ \frac{cx}{b} + \frac{ay}{c} = a + c \\ cy + az = a^2 + c^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \frac{ax}{b} + \frac{cy}{d} + \frac{ez}{f} = a + c + e \\ \frac{dx}{b} + \frac{ey}{d} = d + e \\ bx + fz = b^2 + f^2 \end{vmatrix}$

---

81) a) $\begin{vmatrix} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ z + u = 7 \\ u + 5x = 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x - y = 2 \\ y - z = 2 \\ z - u = 2 \\ 3u - x = 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x + y = 100 \\ z + u = 100 \\ x + 2u = 100 \\ 4z - 3y = 100 \end{vmatrix}$

82) a) $\begin{vmatrix} x + 2y = 5 \\ 2y + 3z = 13 \\ 3z + 4u = 25 \\ 4u + 5x = 21 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2x + 3y = 13 \\ 4y + 5z = 32 \\ 6x + 7u = 59 \\ 8u + 9x = 58 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x - 2y = -6 \\ 3y - 4z = 3 \\ 5z - 6u = 12 \\ 7u - 8x = -75 \end{vmatrix}$

83) a) $\begin{vmatrix} x + y + u = 9 \\ x + y + v = 11 \\ x + u + v = 13 \\ y + u + v = 15 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x + y = u + 6 \\ x + v = y + 12 \\ u + v = x + 5 \\ y + u = v - 1 \end{vmatrix}$

84) a) $\begin{vmatrix} x + y + u - v = 4 \\ x + y - u + v = 10 \\ x - y + u + v = 12 \\ -x + y + u + v = 18 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x - y + u - v = 2 \\ x - y - u + v = 12 \\ x + y + u + v = 44 \\ x + y - u - v = -6 \end{vmatrix}$

85) a) $\begin{vmatrix} 2x + 3y + 5u = 21 \\ 3x + 5y + 2v = 28 \\ 5x + 2u + 3v = 24 \\ 2y + 3u + 5v = 37 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3x + 4y - 5u = 28 \\ -4x + 5y + 3v = 47 \\ 5x - 3u + 4v = 16 \\ 3y + 4u - 5v = 1 \end{vmatrix}$

86) a) $\begin{vmatrix} x + y + z + u = 14 \\ 3x = 2y \\ 4y = 3z \\ 5z = 4u \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x - y + z - u = 2 \\ x + y = 11 \\ x + u = 9 \\ z + u = 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x + y - z - u = 8 \\ 7y = 5x \\ z = 3u \\ y + z = 8 \end{vmatrix}$

87) a) $\begin{vmatrix} 3x + 7y + 6u + 2v = 92 \\ x : y = 1 : 2 \\ x : (u + 3) = 1 : 5 \\ (u - 1) : (v + 1) = 2 : 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5x - 2y + 3u - 4v = -18 \\ x : (y + 2) = 1 : 3 \\ y : (u + 3) = 1 : 2 \\ (u - 1) : (v + 2) = 2 : 3 \end{vmatrix}$

88) a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 11 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 13 \\ -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 19 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 20 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = 2 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 10 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = 0 \end{vmatrix}$

89) a) $\begin{vmatrix} 5x + 4y + 3u + 2v = 39 \\ 4x + 3y + 2u + 5v = 33 \\ 3x + 2y + 5u + 4v = 35 \\ 2x + 5y + 4u + 3v = 33 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3x + 5y + 7u + 9v = 21 \\ 5x + 7y + 9u - 3v = -1 \\ 7x + 9y - 3u + 5v = 17 \\ 9x - 3y + 5u + 7v = 23 \end{vmatrix}$

90) a) $\left|\begin{array}{l} x+y=a \\ y+z=b \\ z+u=c \\ x-u=d \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{l} x+y=2a \\ y+z=2b \\ z+u=2c \\ u-x=2d \end{array}\right|$ c) $\left|\begin{array}{l} x-y=a-c \\ y-z=b-d \\ z-u=c-a \\ x+u=2a+b+d \end{array}\right|$

§. 21. Riječima izražene jednadžbe prvoga stupnja s više nepoznanica.

A. Primjeri raznolični.

1) Suma je dvaju brojeva s, njihova diferencija d. Koliki su ti brojevi?

a) $s=937$, $d=259$; b) $s=1577$, $d=792$;
c) $s=34\frac{1}{3}$, $d=17\frac{1}{2}$; d) $s=76{\cdot}75$, $d=21{\cdot}89$.

2) U skupštini od 48 ljudi primljen je neki prijedlog većinom od 18 glasova. Koliko ih je glasovalo za prijedlog, a koliko protiv njega?

3) Ako zvuk topa, koji ide s vjetrom, prevali u sekundi 340 metara, a zvuk, koji ide protiv vjetra, samo 326 metara, kolika je brzina zvuka, a kolika brzina vjetra?

4) Iz Zagreba ide u 2 sata 56 minuta (zagrebačkoga vremena) brzojavna depeša u Biograd i dođe tamo u 3 sata 38 minuta (biogradskoga vremena); odgovor ode s istom brzinom iz Biograda u 4 sata 36 minuta (biogradskoga vremena) i dođe u Zagreb u 4 sata 42 minuta (zagrebačkoga vremena). U kojem je vremenu brzojavna vijest prenesena iz Zagreba u Zemun i za koliko ide biogradska ura ranije od zagrebačke?

5) Otac zada sinu 60 računskih zadaća i obeća mu za svako pravo riješenje 5 filira, dočim će sin za svako krivo riješenje dati 10 filira. Tim je načinom sin zaslužio tek polovinu onoga, što bi bio zaslužio, da je sve zadaće pravo riješio. Koliko je bilo zadaća pravo, a koliko krivo riješenih?

6) Englez hoće da putuje po Švicarskoj, pa si kupi u mjenjačnici novce po 20 maraka i 20 franaka. U svemu je dobio 54 komada zlatnoga novca, vrijednoga 1000 maraka. Koliko je komada dobio njemačkoga, a koliko francuskoga zlatnoga novca, ako je 20 franaka jednako 16 maraka?

7) Dječak reče drugomu dječaku: daj mi 5 tvojih oraha, pa ću imati tri puta toliko kao ti. Ne, odvrne drugi dječak, daj mi radije ti 2 tvoja oraha, pa ću ja imati pet puta toliko oraha kao ti. Koliko ih je imao svaki?

8) Suma je dvaju brojeva s; omjer je njihov $m:n$. Koji su ti brojevi?

a) $s=85$, $m:n=2:3$; b) $s=121$, $m:n=4:7$;
c) $s=98\frac{2}{3}$, $m:n=3:5$; d) $s=239{\cdot}4$, $m:n=5:9$.

9) Dva se broja odnose kao $m:n$. Uveća li se prvi broj za a, a drugi za b, omjer im je $m':n'$. Koji su ti brojevi?

a) $m:n=2:3$, $a=1$, $b=4$, $m':n'=1:2$;
b) $m:n=3:4$, $a=2$, $b=4$, $m':n'=2:3$;
c) $m:n=5:7$, $a=3$, $b=3$, $m':n'=3:4$.

10) Ako se oba člana omjera uvećaju za 3, bit će novi omjer jednak omjeru $5:6$; umanje li se pak oba člana zadanoga omjera za 3, izjednačit će se s omjerom $2:3$. Što su članovi zadanoga omjera?

11) Razlomak ima vrijednost: $\frac{m}{n}$. Umanjiš li brojnik za a, nazivnik za b, dobit će razlomak vrijednost $\frac{m'}{n'}$. Koji je taj razlomak?

a) $\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$, $a=1$, $b=2$, $\frac{m'}{n'}=\frac{4}{5}$;

b) $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$, $a=2$, $b=1$, $\frac{m'}{n'}=\frac{3}{5}$;

c) $\frac{m}{n}=\frac{5}{6}$, $a=1$, $b=2$, $\frac{m'}{n'}=\frac{6}{7}$.

12) Broj s dvije cifre daje za sumu cifri s. Ako mu se cifre izmijene i novi broj suptrahira od zadanoga, izlazi diferencija d. Koji je taj broj?

a) $s=13$, $d=9$; b) $s=6$, $d=36$;
c) $s=7$, $d=45$; d) $s=11$, $d=63$.

13) Ako se broj s dvije cifre dividira na broj, koji je na mjestu jedinica, izlazi kvocijent α i ostatak r. Dividira li se pak na broj na mjestu desetica, izlazi kvocijent α i ostatak ϱ. Koji je taj broj?

a) $a=8$, $r=7$, $\alpha=11$, $\varrho=2$;
b) $a=13$, $r=2$, $\alpha=10$, $\varrho=4$;
c) $a=6$, $r=5$, $\alpha=11$, $\varrho=3$;
d) $a=13$, $r=6$, $\alpha=10$, $\varrho=7$.

---

14) Dvije glavnice od g i g' kruna daju u jednoj godini skupa k kruna kamata; postoci (procenti), uz koje su glavnice posuđene, odnose se kao $m:n$. Koliki su postoci?

1) $g=2400$, $g'=2800$, $k=264$, $m:n=2:3$;

2) $g=1700$, $g'=2350$, $k=144$, $m:n=1:2$.

15) Veličina dviju glavnica neka se odredi iz ovih podataka. Jednogodišnje su kamate od obiju glavnica 1097 kruna 50 filira, ako je prva ukamaćena po 5%, a druga po $4\frac{1}{2}\%$. Ako se pak prva ukamati po $4\frac{1}{2}\%$, a druga po 5%, dat će obje glavnice zajedno 10 kruna manje kamata.

16) Ako se uzajme dvije glavnice po p i p' postotaka, daju skupa u godini dana k kruna kamata; no ako se uzajme po p' i p postotaka, daju skupa k' kruna kamata. Kolike su obje glavnice?

1) $p=3$, $p'=5$, $k=131$, $k'=117$;

2) $p=4$, $p'=7$, $k=261$, $k'=197$;

3) $p=2\frac{1}{2}$, $p'=3\frac{3}{4}$, $k=85$, $k'=77\frac{1}{2}$.

17) Glavnica, koja je po određenom postotku uložena na kamate, naraste za 8 godina s kamatama na 6486 kruna. Ta bi ista glavnica narasla za 5 godina zajedno s kamatama na $6051\frac{1}{4}$ kruna, kad bi nosila za 1 postotak više kamata. Kolika je glavnica i kolike su joj kamate?

18) Kapital zajedno s kamatama od 7 godina čini 2101 krunu 95 filira; tri puta tako velik kapital čini uz iste postotke nakon 5 godina zajedno s kamatama 5892 krune 75 filira. Kolika su oba kapitala i koliki su postoci?

---

19) Dva su tijela udaljena jedno od drugoga 3600 metara. Ako se gibaju jednoliko jedno proti drugomu, sastat će se nakon 18 sekunda, ako se pak gibaju istim brzinama jedno za drugim, sastat će se nakon 24 sekunde. Kolike su brzine obiju tjelesa?

20) Riješi predašnju zadaću, ako se uzme e mjesto 3600, p mjesto 18, q mjesto 24.

21) Dva jahača pođu na trkalištu s opsegom od o metara od istoga mjesta s različnim brzinama. Idu li protivnim smjerom, sastaju se nakon t minuta; idu li pak istim smjerom, sastaju se nakon t' minuta. Kolike su brzine jahača u minuti?

1) $o=1680$, $t=4$, $t'=7$;

2) $o=2520$, $t=6$, $t'=21$;

3) $o=1650$, $t=5$, $t'=27\frac{1}{2}$.

22) Prazna se posuda za vodu može napuniti iz dviju cijevi. Ako je prva otvorena t minuta, a druga t' minuta, dobiva se a litara vode; ako je pak prva cijev otvorena t' minuta, a druga t minuta, dobiva se b litara vode. Koliko litara vode daje svaka cijev napose u jednoj minuti?

1) $a=340$, $t=5$, $t'=8$, $b=310$;

2) $a=285$, $t=3$, $t'=10$, $b=222$;

3) $a=491\frac{2}{3}$, $t=2\frac{1}{2}$, $t'=3\frac{1}{3}$, $b=500$.

23) Posuda se može napuniti iz dviju cijevi A i B. Ako je cijev A otvorena a minuta i cijev B b minuta, bit će posuda baš puna; ako je pak cijev A otvorena a_1 minuta i cijev B b_1 minuta, napunit će se samo $\frac{m}{n}$ posude. U kojem bi vremenu svaka cijev sama napunila posudu?

1) $a=7$, $b=16$, $a_1=3$, $b_1=12$, $\frac{m}{n}=\frac{9}{14}$;

2) $a=9$, $b=8$, $a_1=5$, $b_1=12$, $\frac{m}{n}=\frac{14}{15}$;

3) $a=3$, $b=8$, $a_1=4$, $b_1=5$, $\frac{m}{n}=\frac{31}{36}$.

24) Parobrod za putnike prevali 63 kilometra uz rijeku za 5 sati, a niz rijeku za 3 sata. Koliko kilometara prevali taj parobrod snagom svoga stroja, a koliko kilometara prevaljuje voda rijeke u svakom satu?

---

25) Treba naći takova tri broja, da suma prvoga i drugoga bude 5, suma drugoga i trećega 8, a suma prvoga i trećega 7.

26) Ako se prvi od tri tražena broja dividira u 3, drugi u 6, treći u 12, daje suma kvocijenata $\frac{5}{6}$; ako se pak dividira prvi broj u 6, drugi u 12, treći u 3, daje suma kvocijenata $1\frac{1}{12}$; ako se napokon prvi broj dividira u 12, drugi u 3, treći u 6, daje suma $1\frac{7}{24}$. Koji su ti brojevi?

27) Neki broj s tri cifre, u kojemu je suma cifri 14, ima to svojstvo, da je prva cifra dvadeset i četvrti dio broja sastavljenoga od druge dvije cifre, a posljednja je cifra trideset i prvi dio cijeloga broja. Koji je taj broj?

---

§. 21a. Zadaće iz geometrije i fizike.

A. Geometrija.

1) Izvanji je kut u trokutu δ; diferencija obaju unutrašnjih neprileležećih kutova je d. Koliki su ti kuti?
1) $\delta = 110^0$, $d = 50^0$; 2) $\delta = 121^0$, $d = 23^0$;
3) $\delta = 89\frac{3}{4}^0$, $d = 17\frac{1}{4}^0$; 4) $\delta = 156{\cdot}2^0$, $d = 8{\cdot}6^0$.

2) Opseg je pravokutnika o centimetara; diferencija dviju susjednih stranica d centimetara. Kolike su stranice pravokutnika?
1) $o = 38$, $d = 5$; 2) $o = 34$, $d = 9$;
3) $o = 34\frac{1}{2}$, $d = 2\frac{1}{4}$; 4) $o = 24{\cdot}4$, $d = 4{\cdot}6$.

3) Opseg je istokračnoga trokuta o centimetara; diferencija osnovke i kraka je d centimetara. Kolika je osnovka i kolik je krak trokuta?
1) $o = 70$, $d = 10$; 2) $o = 48$, $d = 3$;
3) $o = 39\frac{1}{4}$, $d = 1\frac{3}{4}$; 4) $o = 25{\cdot}6$, $d = 1{\cdot}9$.

4) Diferencija polumjera dvaju krugova je d centimetara; suma njihovih opsega je s centimetara. Koliki su premjeri? ($\pi = \frac{22}{7}$.)
1) $d = 21$, $s = 154$; 2) $d = 14$, $s = 88$;
3) $d = 28$, $s = 220$; 4) $d = 35$, $s = 286$.

5) Suma pljoština dvaju krugova je s, a diferencija njihovih pljoština je d. Kolik je polumjer svakoga kruga? ($\pi = 3{\cdot}14$.)
1) $s = 40{\cdot}82\ cm^2$, $d = 15{\cdot}70\ cm^2$;
2) $s = 78{\cdot}50\ cm^2$, $d = 21{\cdot}98\ cm^2$;
3) $s = 128{\cdot}74\ cm^2$, $d = 28{\cdot}26\ cm^2$;
4) $s = 106{\cdot}76\ cm^2$, $d = 50{\cdot}24\ cm^2$.

6) Suma obujmova dviju kocaka je s, a njihova diferencija je d. Kolik je brid svake kocke?
1) $s = 35\ cm^3$, $d = 19\ cm^3$; 2) $s = 152\ cm^3$, $d = 98\ cm^3$;
3) $s = 19\ cm^3$, $d = 12\frac{1}{4}\ cm^3$; 4) $s = 10{\cdot}989\ cm^3$, $d = 7{\cdot}533\ cm^3$.

7) Kod upravnoga kružnoga valjka je diferencija oblине (plašta) i jedne osnovke jednaka d; cijelo je oplošje tijela O. Kolika je oblina i osnovka?
1) $d = 4cm^2$, $O = 10\ cm^2$; 2) $d = 8cm^2$, $O = 23\ cm^2$;
3) $d = 6\frac{4}{5}\ cm^2$, $O = 15\frac{1}{5}\ cm^2$; 4) $d = 1{\cdot}8\ cm^2$, $O = 12{\cdot}3\ cm^2$.

8) Opseg je istokračnoga trokuta o; osnovka se odnosi prema kraku kao $m:n$. Traži se osnovka i krak toga trokuta.
1) $o = 33\ cm$, $m:n = 3:4$; 2) $o = 38\ cm$, $m:n = 9:5$;
3) $o = 84\ cm$, $m:n = 2:5$; 4) $o = 17{\cdot}5\ cm$, $m:n = 3:2$.

9) U trapezu, kojemu je srednjica jednaka a, jesu usporedne stranice u omjeru $m:n$. Kolike su usporedne stranice?
1) $a = 20\ cm$, $m:n = 3:5$; 2) $a = 22\ cm$, $m:n = 4:7$;
3) $a = 16{\cdot}5\ cm$, $m:n = 2:9$; 4) $a = 13{\cdot}5\ cm$, $m:n = 4:5$.

10) Diferencija opsega dvaju krugova je d; premjeri se odnose kao $m:n$. Koliki su premjeri? ($\pi = \frac{22}{7}$.)
1) $d = 44\ cm$, $m:n = 5:3$; 2) $d = 154\ cm$, $m:n = 9:2$;
3) $d = 66\ cm$, $m:n = 8:5$; 4) $d = 110\ cm$, $m:n = 12:7$.

11) U trokutu je povučena usporednica k jednoj stranici u daljini a od nje. Visina trokuta, koja pripada toj stranici, jednaka je h, a diferencija stranice i usporednice je d. Kolika je stranica i usporednica?
1) $a = 1\ cm$, $h = 3\ cm$, $d = 4\ cm$;
2) $a = 4\ cm$, $h = 7\ cm$, $d = 20\ cm$;
3) $a = 16\ cm$, $h = 25\ cm$, $d = 4\frac{4}{15}\ cm$;
4) $a = 7\ cm$, $h = 16\ cm$, $d = 1{\cdot}4\ cm$.

12) U sličnim su likovima a i a' homologne stranice. Suma je pljoština obaju likova s. Kolike su pljoštine?
1) $a = 2\ cm$, $a' = 3\ cm$, $s = 26\ cm^2$;
2) $a = 4\ cm$, $a' = 5cm$, $s = 123\ cm^2$;
3) $a = 3\ cm$, $a' = 5\ cm$, $s = 25\frac{1}{2}\ cm^2$;
4) $a = 4\ cm$, $a' = 7\ cm$, $s = 29{\cdot}25\ cm^2$.

13) Ako se dužina pravokutnika uveća za a, a širina za b, uveća se pljoština za f; ako se pak dužina umanji za a', a širina za b', umanji se i pljoština za f'. Traži se dužina i širina pravokutnika.
1) $a = 4\ cm$, $b = 2\ cm$, $f = 64\ cm^2$, $a' = 3\ cm$, $b' = 1\ cm$, $f' = 33\ cm^2$;
2) $a = 5\ cm$, $b = 4\ cm$, $f = 170\ cm^2$, $a' = 6\ cm$, $b' = 3\ cm$, $f' = 126\ cm^2$.

14) Umanji li se u pravokutnom trokutu ACB kateta AC za a i kateta BC za b, umanji se kvadrat nad hipotenuzom za f; umanji li se pak AC za a' i BC za b', umanji se kvadrat nad hipotenuzom za f'. Kolike su katete trokuta ACB?
1) $a = 3\ cm$, $b = 4\ cm$, $f = 53\ cm^2$, $a' = 2\ cm$, $b' = 3\ cm$, $f' = 43\ cm^2$;
2) $a = 5\ cm$, $b = 2\ cm$, $f = 77\ cm^2$, $a' = 3\ cm$, $b' = 4\ cm$, $f' = 89\ cm^2$;

3) $a = 2cm$, $b = 0{\cdot}2\,cm$, $f = 1{\cdot}50\,cm^2$, $a' = 3{\cdot}6\,cm$, $b' = 0{\cdot}4\,cm$, $f' = 2{\cdot}46\,cm^2$.

15) U trokutu ABC je diferencija $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ jednaka m stupanja, a diferencija $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ jednaka n stupanja. Koliki su kuti toga trokuta?

1) $m = 10$, $n = 40$; 2) $m = 30$, $n = 60$;
3) $m = 23$, $n = 29$; 4) $m = 8$, $n = 17$.

16) U trokutu, kojemu se stranice odnose kao $a:b:c$, potegnuta je usporednica k jednoj stranici. Opseg je odrezanoga trokuta o. Kolike su stranice odrezanoga trokuta?

1) $a:b:c = 3:4:5$, $o = 8\,cm$; 2) $a:b:c = 5:7:10$, $o = 13\frac{1}{5}\,cm$.

17) Uvećaju li se tri brida pravokutnoga paralelepipeda, koji se sastaju u istoj točki, za a, b, c, uveća se kvadrat nad diagonalom tijela za f_1; uvećaju li se pak ona tri brida za b, c, a, naraste diagonalni kvadrat za f_2; uvećaju li se napokon ona tri brida redom za c, a, b, naraste diagonalni kvadrat za f_3. Koliki su bridovi toga paralelepipeda?

1) $a = 1\,cm$, $b = 2\,cm$, $c = 3\,cm$, $f_1 = 34\,cm^2$, $f_2 = 40\,cm^2$, $f_3 = 40\,cm^2$;
2) $a = 2cm$, $b = 3\,cm$, $c = 5\,cm$, $f_1 = 194\,cm^2$, $f_2 = 180\,cm^2$, $f_3 = 180\,cm^2$.

B. Zadaće iz fizike.

a) Mehanika.

18) a) $12{\cdot}5\,cm^3$ pluta i $5\,cm^3$ olova važu $60\,g$; $5\,cm^3$ pluta i $12{\cdot}5\,cm^3$ olova važu $143{\cdot}7\,g$; kolika je specifična težina pluta i olova?

b) $97\,g$ voska i $3\,g$ željeza zapremaju obujam od $100{\cdot}4\,cm^3$, $29{\cdot}1\,g$ voska i $9{\cdot}9\,g$ željeza zapremaju obujam od $31{\cdot}32\,cm^3$; kolika je specifična težina voska i željeza?

c) Komad srebra od specifične težine $10{\cdot}5$ i komad zlata od specifične težine $19{\cdot}3$ imaju zajedno obujam od $30\,cm^3$. Uzme li se srebra $21\,g$ manje, a zlata $38{\cdot}6\,g$ više, bit će obujam srebra za $6\,cm^3$ veći od obujma zlata; koliko su vagali u prvom slučaju komadi kovine? (Odnošaj $p = vs$.)

19) a) Mjesta A i B udaljena su jedno od drugoga 26[40 5] kilometara. Od A pođe pošta prema B i u isto doba krene iz B pješak. Ako ide pošti nasusret, sastane se s njom nakon 2[3] ure; pođe li pak protivnim smjerom, stići će ga pošta nakon 8 sati 40 minuta [9 sati]; kolike pute prevaljuju pošta i pješak u jednom satu?

b) A je 80[75] kilometara daleko od B. Iz A pođe u 9 sati u jutro brzi vlak u smjeru prema B i stigne osobni vlak, koji je u isto doba i istim smjerom krenuo iz B, u 11[12] sati. Ako je osobni vlak otišao već u 7[6] sati, stigne ga brzi vlak tek po podne u 1[6] sati; koliko kilometara prevali svaki vlak u jednom satu? (Jednoliko gibanje.)

20) a) Pod kutom elevacije od $\alpha = 45^0$ baci se tijelo s brzinom od $c = 70[140]$ metara; u kojoj će visini h doseći horizontalnu daljinu $d = 100[180]$ metara?

b) Koliku će visinu doseći tijelo nakon 10[20] sekunda kod kuta elevacije od 45^0, ako je horizontalna daljina od ishodišta 500[2000] metara? (Kosi hitac u vis.)

21) a) Elastična kugla težine $p_1 = 15[13]$ kilograma udari o drugu, koja se giba u istom smjeru i ima težinu $p_2 = 14[18]$ kilograma; poslije sraza su im brzine (u istom smjeru) $c_1 = 59[88]$ metara i $c_2 = 88[119]$ metara; kolike su brzine v_1 i v_2 prije raza?

b) Elastična kugla od 2[4] kilograma udari o drugu od 3[5] kilograma, koja se giba u protivnom smjeru; kolike su im brzine prije sraza, ako su poslije njega 13[32] i 2[13] metara? (Sraz elastičnih kugala.)

22) a) Od dvije masivne staklene kugle izgubi jedna 4[5] grama težine u vodi, a druga za $12{\cdot}5[5{\cdot}2]$ grama teža kugla izgubi 9[7] grama; kolika je specifična težina stakla i kolika je težina manje kugle?

b) Netko ima komad olova od specifične težine $11{\cdot}4$, uzme li još 280[70] grama olova, izgubi cijela masa u alkoholu 159[40] grama; doda li prvomu komadu još 2560[127] grama, gubitak je težine u alkoholu 318[44] grama; kolika je apsolutna težina prvoga komada i kolika je specifična težina alkohola?

c) Uroniš li 14 grama magnezija i $5{\cdot}14$ grama aluminija u petrolej od specifične težine $0{\cdot}9$, bit će cijeli gubitak težine 9 grama. Uroniš li pak 7 grama magnezija i $20{\cdot}56$ grama aluminija u isti petrolej, cijeli je gubitak težine $10{\cdot}8$ grama. Kolike su specifične težine magnezija i aluminija? (Arhimedov zakon.)

b) Toplina.

23) a) Štap se od kositra produži za 2 milimetra, ako mu se temperatura povisi od 0^0 do 100^0; ako se pak temperatura povisi od 0^0 na 200^0 produži se on za 0·4 postotaka; kako je dugačak štap kod 0^0 i kolik je koeficijent rastezanja u kositra?

b) Ako se štap od čelika i tutije (cinka) ugriju od 0^0 na 300^0, produži se drugi za 2·94 milimetra više nego prvi. Ugrije li se štap od čelika od 0^0 do 3^0, a štap od tutije od 0^0 do 1^0, produženja su njihova jednaka; kako su dugačka oba štapa kod 0^0, ako je koeficijent rastezanja za čelik 0·00001225, a za tutiju 0·0000294? (Rastezanje toplinom.)

24) a) Neka masa plina ima kod temperature $t_1 = 91^0$ i tlaka $p_1 = 750$ milimetara obujam $v_1 = 10$ litara; kolik je obujam v_2 kod temperature $t_2 = 455^0$ i kod tlaka $p_2 = 500$ milimetara, ako se uzme, da je koeficijent rastezanja $\alpha = \frac{1}{273}$?

b) Neka masa plina zaprema kod tlaka od 550 milimetara i temperature od $13\frac{7}{11}{}^0$ obujam od 6 litara; kod koje će temperature uz tlak od 825 milimetara zapremati obujam od 8 litara, ako se za koeficijent rastezanja uzme $\frac{1}{300}$?

c) Kod temperature od $18\frac{4}{7}\frac{2}{3}\frac{1}{3}{}^0$ i kod tlaka od 375 milimetara zaprema neka masa plina obujam od 16 litara; pod kojim će tlakom kod temperature od 310^0 zapremati obujam od 12 litara, ako je koeficijent rastezanja 0·003665? (Rastezanje plinova toplinom).

25) a) Ako se smiješaju 2 količine vode od različite temperature, pa prva ima 7, a druga 13 kilograma, dobije se voda s temperaturom od 59^0. Uzme li se od prve vode za 3 kilograma više, a od druge za isto toliko manje, dobije se voda od temperature 50^0; koje su temperature obiju voda?

b) Miješa li se voda od 15^0 s vodom od 45^0, izlazi voda od 37^0; uzme li se prve vode 1 kilogram više, a druge isto toliko manje, izlazi voda od 35^0. Koliko se je vode od svake vrste uzelo kod prvoga pokusa? (Temperatura smjese vode. Richmannovo pravilo.)

26) a) Voda od 3^0 daje sa živom od 25^0 temperaturu smjese od 5^0. Uzme li se vode 7 kilograma više, žive 275 kilograma više, izlazi temperatura smjese $11{\cdot}25^0$; koliko je vode i koliko žive bilo u prvom slučaju, ako je specifična toplina žive 0·028?

b) Ako se nalije 19 kilograma vode na 100 kilograma željeza, izlazi temperatura smjese 70^0. Uzmeš li pak vode 28·5 kilograma, željeza 50 kilograma, izlazi temperatura smjese 40^0. Kolike su temperature vode i željeza, ako je specifična toplina željeza 0·114? (Specifična toplina.)

C. Zadaće za ponavljanje.

1) Mjed (Mesing) je sastavljena od bakra i cinka. Koliko bakra, a koliko cinka ima u smjesi od 124 kilograma, ako 89 kilograma bakra izgubi u vodi od svoje težine 10 kilograma, 7 kilograma cinka 1 kilogram, a onih 124 kilograma mjedi 15 kilograma?

2) Smjesa od olova i cinka (tutije), koja važe 149 kilograma, izgubi u vodi 18 kilograma. Koliko kilograma ima od svake kovine u njoj, ako $11\frac{1}{3}$ kilograma olova izgubi u vodi 1 kilogram, a $6\frac{3}{4}$ kilograma cinka također 1 kilogram?

3) Po Vitruvu bijaše kruna kralja Hierona teška 20 funta i izgubi u vodi $1\frac{1}{4}$ funte. Koliko je moralo biti u njoj zlata, a koliko srebra, za slučaj, da je bila sastavljena samo od zlata i srebra, ako $19\frac{1}{4}$ funte zlata izgubi u vodi 1 funtu, a $10\frac{1}{2}$ funte srebra također 1 funtu?

4) Kamen, kojemu je specifična težina 3, sastavljen je s komadom pluta, kojemu je specifična težina 0·24. Kako je težak kamen i kako težak mora da bude komad pluta, ako sve zajedno važe 115 kilograma, pa je baš tako teško kao voda t. j. u njoj niti se diže niti propada?

5) Mladić si je načinio pojas od pluta, da lakše pliva. On zajedno s pojasom važe 71 kilogram, pa je u vodi baš tako težak, da može najgornji dio tijela, težak 8 kilograma, imati iznad vode, inače pak niti ga voda diže više, nego treba, niti u njoj propada, ruke i noge dakle može upotrijebiti, da se dalje kreće u vodi. Koliko je vagao mladić, a koliko pojas od pluta, ako 40 kilograma njegova tijela važe pod vodom samo 1 kilogram, a specifična je težina pluta 0·24?

6) Jelova je daska okovana bakrom i važe 4200 grama. Kad se uroni u vodu ostane iznad vode 100 grama drva i 236 grama bakra. Kako se razdijeli cijela težina na drvo i na bakar, ako se uzmu za specifične težine tih tvari brojevi 0·5 i 8·9?

Smjesni račun.

1) Netko ima dvije vrste zlata različitoga sadržaja. 71 funta prve vrste i 195 funta druge daju zlato sadržaja 800. 171 funta prve i 95 funta druge daju zlato sadržaja 900. Kojeg je sadržaja bila svaka vrsta?

2) Netko ima dvije vrste srebra. Uzme li 375 kilograma prve vrste i 125 kilograma druge, dobije srebro sadržaja 880. Uzme li pak 225 kilograma prve i 275 kilograma druge, bit će smjesa sadržaja 850. Kojega je sadržaja bila svaka vrsta?

3) Netko je imao 1000 grama zlata sadržaja 900 i 750. Smiješano dalo je zlato sadržaja 831. Koliko je grama bilo od svake vrste?

4) Netko ima dvije vrste spirita (žeste); 23 litre prve vrste i 47 litara druge daju smjesu od $84\frac{5}{7}$ postotaka; 43 litre prve i 17 litara druge daju smjesu od $80\frac{5}{6}$ postotaka. Koliko je postotaka imala svaka vrsta?

Mehanika.

1) U dvije zasebične sekunde zabilježeni su na Atwoodovu stroju za padanje puti od 9 centimetara i 12·6 centimetara. Koliko je vremena proteklo od početka padanja do početka pokusa i kolik je bio u prvoj sekundi?

2) U posljednoj sekundi prije nego što se je digla pretega na Atwoodovu stroju bio je put 10·5 centimetara. Iza toga bilo je gibanje jednoliko s brzinom od 12 centimetara u sekundi. Koliko je vremena prošlo do časa, kad se je digla pretega i kolik je bio put u prvoj sekundi?

Elektriciteta.

1) Galvanska struja pane na 1·4 Ampera, ako se uklopi otpor od 3 Ohma; ona spane na 1 Amp., ako se uklopi 5 Ohma. Kolika je prema tomu elektromotorna sila i kolik je bio na početku cijeli otpor?

2) Tijem, što se broj elemenata u bateriji uveća od 3 na 5, digne se jakost struje od 1·5 Amp. na 1·8 Amp., dočim je u isto doba cjelokupni otpor narasao za 1·4 Ohma. Kolika je elektromotorna sila jednoga elementa i kolik je bio čitavi otpor prve baterije?

3) Struja se od 3 Amp. razgrani u dvije bakrene žice, od kojih je jedna 1 metar dugačka uz debljinu od 2 milimetra, a druga je 2 metra dugačka uz debljinu od 1 milimetra. Kolika je jakost struje u svakoj grani?

§. 22. Riješavanje linearnih jednadžbi s pomoću determinanta.

1) Iz $\begin{matrix} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{matrix}$ izlazi:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ i } y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \text{ gdje je:}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

2) Iz $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ izlazi:

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}, \text{ gdje je:}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

§. 22. A.

1) Razvij i izračunaj ove determinante drugoga stupnja:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

2) To isto učini s determinantama:

a) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$.

3) To isto učini s determinantama:

a) $\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$.

4) To isto učini s determinantama:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 12 & 18 \\ 24 & 9 \end{vmatrix}$.

5) To isto učini s determinantama:

a) $\begin{vmatrix} 1\frac{3}{4} & 4\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} & 3\frac{3}{4} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1\frac{5}{7} & 4\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{7} & 5\frac{3}{4} \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1{\cdot}4 & 0{\cdot}3 \\ 4{\cdot}2 & 0{\cdot}5 \end{vmatrix}$.

6) To isto učini s determinantama:

a) $\begin{vmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x+y & x-2y \\ x+2y & x-y \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} Cos\frac{1}{2}\alpha & Sin\frac{1}{2}\alpha \\ Sin\frac{1}{2}\alpha & Cos\frac{1}{2}\alpha \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} Sin\,\alpha & Cos\,\alpha \\ Sin\beta & Cos\beta \end{vmatrix}$.

7) Pretvori u determinante drugoga stupnja izraze:
a) $ac - b^2$; b) $a_2c_3 + a_3c_2$; c) $x^2 + y^2$; d) m^2;

8) Razriješi s pomoću determinanta ove sisteme jednadžbi:
a) $7x + 3y = 13$, $4x + 5y = 14$; b) $8x + 3y = 25$, $2x + 5y = 19$; c) $7x - 2y = 29$, $3x + 4y = 27$.

9) Isto tako:
a) $4x + 3y = 3$, $6x - 9y = 0$; b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1\frac{1}{3}$, $x - \frac{1}{2}y = 5$; c) $7x - 8y = 0{\cdot}1$, $5x - 3y = -0{\cdot}2$.

10) Isto tako:
a) $3x + 4y = 0$, $2x - y + \frac{11}{24} = 0$; b) $-5x + 10y = 65$, $5x - 3y = 30$;
c) $-3x + 4y - 1 = 0$, $4x - 3y - 1 = 0$.

11) Isto tako:
a) $2x + 3y = 0$, $5x + 7y = 0$; b) $x + y = 8$, $x - y = 2$; c) $7x + 3y = 10$, $14x - 6y = 20$.

12) Kako se može svaka proporcija $a : b = c : d$ napisati u obliku jednadžbe, kojoj je lijeva strana determinanta?

§. 22. B.

13) Determinante trećega stupnja, što dolaze, neka se razviju u subdeterminante po elementima prvoga stupca i onda izračunaju:
a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

14) To isto učini s determinantama:
a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

15) To isto učini s determinantama:
a) $\begin{vmatrix} m & p & q \\ o & m & p \\ o & o & m \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$.

16) Dokaži, da je:
a) $\begin{vmatrix} o & a & b \\ a & o & c \\ b & c & o \end{vmatrix} = 2abc$;
b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & b & m \\ -a & -b & c \end{vmatrix} = 4abc$.

17) Izračunaj po kraćem načinu (Sarrusovom) ove determinante:
a) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} o & a & b \\ d & o & c \\ e & f & o \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} o & a & b \\ a & o & b \\ a & b & o \end{vmatrix}$.

18) Isto tako izračunaj:
a) $\begin{vmatrix} o & a & o \\ b & o & c \\ o & d & o \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x & a & b \\ -a & x & c \\ -b & -c & x \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} x & o & c \\ -1 & x & b \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

19) Riješi s pomoću determinanta ove sisteme jednadžbi:
a) $3x + 2y + 5z = 22$, $4x + 3y + 2z = 16$, $2x + 5y + 3z = 21$;
b) $8x - 9y + 10z = 79$, $9x - 10y + 8z = 64$, $10x - 8y + 9z = 100$.

20) Isto tako:
a) $14x + 13y - 15z = 14$, $16x - 17y + 18z = -51$, $19x + 20y - 21z = 22$;
b) $3x - 5y + 4z = 0{\cdot}5$, $7x + 2y - 3z = 0{\cdot}2$, $4x + 3y - z = 0{\cdot}7$.

21) Isto tako:
a) $x + y - z = a$, $x - y + z = b$, $-x + y + z = c$;
b) $x + y + z = 5$, $3x - 5y + 7z = 75$, $9x - 11z + 10 = 0$;
c) $x + y = 16$, $z + x = 22$, $y + z = 28$.

§. 22. C.

22) Imaju li riješenja u konačnim određenim brojevima ovi sistemi jednadžbi:
a) $x + y = 17$, $3x + 3y = 51$; b) $x - y = m$, $ax - ay = n$; c) $2x + 3y = 10$, $4x + 6y = 20$;
d) $4x + 3y = 12$, $6x + 4\frac{1}{2}y = 19$; e) $x + 2y - 5z = 17$, $3x + y - 2z = 11$, $3x - 4y + 11z = -29$;
f) $x + y - z = a + b$, $x - y + z = a - b$, $y - z = b$.

§. 22. E.

23) Neka se s pomoću subdeterminanta eliminiraju po dvije nepoznanice u sistemima jednadžbi pod 19) i 20).

24) Neka se riješe sistemi jednadžbi pod 19), 20) i 21) s pomoću pređašnje metode za eliminaciju dviju nepoznanica.

§. 22. F.

25) Kada će imati zajednički korijen jednadžbe:

a) $ax+b=0$; $bx+a=0$; b) $5x-8=0$; $ax+a=0$;

c) $ax+by+c=0$; $dx+ey+f=0$; $gx+hy+k=0$; d) $ax-ay+b=0$; $bx+by-a=0$; $ax+by-c=0$.

26) Neka se odrede omjeri nepoznanica u sistemima jednadžbi:

a) $3x+4y-3z=0$; $5x-5y+2z=0$; b) $3x+6y+5z=0$; $2x+5y+4z=0$.

§. 23. Neodređene jednadžbe prvoga stupnja.

A. Dvije nepoznanice u jednoj jednadžbi.

Jednadžbe, što dolaze, neka se riješe u cijelim pozitivnim brojevima.

1) $x+y=10$. **2)** $2x+3y=25$. **3)** $y=13+\frac{4}{13}(15-x)$.

4) $123x+567y=5028$. **5)** $13x+24y=2373$.

6) $3875x+2973y=122362$. **7)** $3x+5y=10$.

8) $5x+8y=29$. **9)** $16x+4y=1830$.

10) $17x+53y-123=441-19x+15y$. **11)** $\frac{3}{2}x+\frac{5}{3}y=36$.

12) $\frac{3x-1}{5}+\frac{4y+2}{10}=7$. **13)** $\frac{9x+1}{7}=\frac{80-7y}{4}$.

14) $\frac{4x+7y+45}{20}-\frac{9x+4y+10}{15}=\frac{5(x+1)-6y}{10}$.

Primjene.

15) Koji pozitivni broj daje dividiran na 4 ostatak 3, a dividiran na 5 ostatak 2?

Riješenje. Taj broj neka bude N, onda je $\frac{N}{4}=x+\frac{3}{4}$ i $\frac{N}{5}=y+\frac{2}{5}$. Obje se vrijednosti od N izjednače i onda odrede x i y, koji moraju biti cijeli pozitivni brojevi.

16) Koji je broj djeljiv na 11 i daje ostatak 5, ako se dividira na 7?

17) Koji broj daje, dividiran na 4, ostatak 1, a dividiran na 5 ostatak 3?

18) Koji broj daje, dividiran na 37, ostatak 11, a dividiran na 10 ostatak 0?

19) Broj 71 neka se rastvori u dva dijela, od kojih je prvi djeljiv na 5, a drugi na 8.

20) Broj 131 neka se rastvori u dva dijela tako, da prvi dio, dividiran na 7, dade ostatak 3, a drugi, dividiran na 11, ostatak 5.

21) Odredi dva broja tako, da prvi multipliciran sa 6, a drugi multipliciran sa 7, dade produkte, kojima je suma a) jednaka 20, b) jednaka 97.

22) Broj 100 neka se rastvori u dva sumanda, od kojih je prvi djeljiv na 11, a drugi: a) djeljiv na 8, b) dividiran na 8 daje ostatak 7.

23) Koja su dva broja s dvije cifre za 4 veća od šesterostruke sume njihovih cifri?

24) Kako se piše općeni oblik svih brojeva: a) koji su djeljivi i na 3 i na 5, b) koji su djeljivi na 3, a dividirani na 5, daju ostatak 1, c) koji dividirani i na 3 i na 5 daju ostatak 1?

25) Netko kupi konjâ i volova; za konja plati 282 krune, za vola pak 198 kruna, pa opazi, da su volovi u opće 36 kruna više stajali nego konji. Koliko je bilo volova, a koliko konja?

26) Gospođa je kupila šećera i kave i izdala je na to 36 kruna 80 filira. Koliko je kupila od svakoga, ako je za kilogram kave platila 3 krune 20 filira, a za kilogram šećera 1 krunu 12 filira?

27) U društvu, u kojem je bilo više gospođa nego gospode, skupiše u dobru svrhu 36 kruna tijem, što je svaki gospodin dao 1 krunu 20 filira, a svaka gospođa dala 75 filira. Koliko je bilo gospođa, a koliko gospode u tom društvu?

28) Satnika zapitaše, koliko je vojnika u njegovoj satniji; on odgovori: „Ako vojnike svrstam u redove po 5 momaka, ostaje ih 4, ako ih pak svrstam po 6 momaka, ostaje ih 5; u svemu imam između 60 i 90 momaka“. Kolika je bila satnija?

29) Razlomak $\frac{128}{117}$ neka se pretvori u sumu dvaju razlomaka kojima su nazivnici 9 i 13.

30) U krugu treba povući dva polumjera tako, da jedan od središnjih kutova bude djeljiv na 11, a drugi na 12.

31) S dvije bočice od 5 i 13 cm^3 treba odmjeriti 243 cm^3 žive. Na koliko se načina može to uraditi?

32) Kako se može na vagi izravnati tijelo teško 467 miligrama s dvije vrste olovnih zrna, od kojih je veće teško 11, a manje 4 miligrama?

33) Na termometru je na jednoj strani cijevi skala po Celsiju, a na drugoj po Fahrenheitu. Koje se crte obiju skala podudaraju?

34) Na koliko se načina može iz zlata od 5 i zlata od 17 karata načiniti 20 grama slitine od 11 karata?

B. Dvije jednadžbe s tri nepoznanice.

35) $\left|\begin{array}{l} 4x+5y=24-5z \\ 3x+2y=7 \end{array}\right|$.

36) $\left|\begin{array}{l} 14x+9y+10z=72 \\ 11x+7y-z=22 \end{array}\right|$.

37) $\left|\begin{array}{l} x+3y+5z=44 \\ 3x+5y+7z=68 \end{array}\right|$.

38) $\left|\begin{array}{l} x+2y+3z=50 \\ 4x-5y-6z=-66 \end{array}\right|$.

39) $\left|\begin{array}{l} x+y-4z=-19 \\ 3x+7y-8z=3 \end{array}\right|$.

40) $\left|\begin{array}{l} x+y+2z=17 \\ x+3y+4z=28 \end{array}\right|$.

41) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=z \\ 7x-6y=3z \end{array}\right|$.

42) $\left|\begin{array}{l} 4(x+y-3z)=7(3y-x-6) \\ 2(8y-11)=29(x+y-8z) \end{array}\right|$.

43) $5x=7y=9z$.

44) $12x=15y=20z$.

45) $391x=493y=667z$.

46) $\frac{4x+y-z}{3}=\frac{7x+2y-5}{6}=\frac{4y+z-2}{9}$.

47) $\left|\begin{array}{l} 8x+3y-2z=8 \\ 7x+2y-z=8 \end{array}\right|$.

48) $\left|\begin{array}{l} 2x+5y-7z=22 \\ 3x+4y-8z=0 \end{array}\right|$.

49) $\left|\begin{array}{l} 2x+3y+4z=70 \\ 3x+2y+5z=74 \end{array}\right|$.

50) $\left|\begin{array}{l} 10x-7y+5z=85 \\ 9x+5y-8z=360 \end{array}\right|$.

51) Odredi od brojeva, koji dividirani na 4 daju ostatak 1, dividirani na 5 ostatak 2 i dividirani na 19 ostatak 3: a) najmanji, b) općeni oblik njihov.

52) Koji je broj s 3 cifre djeljiv na 9 i daje, dividiran na 7 ostatak 5, dividiran na 11 ostatak 9 i dividiran na 13 ostatak 11?

53) Zlatni broj godine zove se ostatak, što ga daje broj godine uvećan za jedinicu, kod divizije na 19; sunčani krug godine zove se ostatak, što ga daje broj godine, uvećan za 9, kod divizije na 28; a rimski kamatni broj ostatak, što ga daje broj godine, uvećan za 3, kod divizije na 15. Koja godina ima prema tomu zlatni broj 14, sunčani krug 26 i rimski kamatni broj 10?

54) Koja godina prije ili poslije rođenja Kristova ima zlatni broj 19, sunčani krug 28, rimski kamatni broj 15?*

55) Neki broj daje dividiran na 3 ostatak 2, dividiran na 5 ostatak 3 i dividiran na 7 ostatak 2; koji je to broj?**

56) Neka se broj 17 rastvori u tri cijela broja, koji imaju svojstvo, da prvi multipliciran s 5, drugi s 4 i treći sa 7, daju produkte, koji imaju sumu 80. Koji su ti brojevi?

57) Za 30 komada novca kupljeno je 30 ptica, i to vrebaca, kojih je bilo 3 za jedan komad novca, grlica, kojih je bilo 2 za 1 komad novca i golubova, kojih se svaki platio s 2 komada novca. Koliko je ptica kupljeno od svake vrste?***

58) Iz 100 grama olova načinili su 100 kuglica trojake težine; prva je vrsta bila teška 10 grama, druga 3 grama, a treća 0·5 grama. Koliko ih je bilo od svake vrste?

59) Ako se 100 mjerova razdijeli među 100 osoba tako da muž dobije 3, žena 2, a dijete $\frac{1}{2}$ mjerova, koliko je bilo muževa, žena i djece?

60) *A* isplati dug od 545 for. u bankama po 10, 5 i 1 for., i to tako, da je broj banaka po 1 for. polovina od broja banaka po 10 i 5 for. zajedno. Kako se može isplata obaviti? Kod koje će se isplate sve tri vrste novca najjednoličnije upotrijebiti?

61) U krugu treba tri polumjera tako povući, da broj stupanja prvoga kuta bude djeljiv na 3, broj stupanja drugoga kuta na 5, a trećega na 7.

62) Neka se sastave trokuti sa svojstvom, da je broj stupanja jednoga od tri kuta djeljiv na 7, broj stupanja drugoga kuta na 11, a trećega na 13.

63) Na koliko se različitih načina može iz zlata od 7, 12 i 17 karata načiniti 50 grama slitine od 15 karata?

64) Razlomak $\frac{89}{30}$ treba rastvoriti u tri parcijalna razlomka s nazivnicima 4, 6 i 9.

65) Rastvori razlomak $\frac{3355}{252}$ u tri parcijalna razlomka s nazivnicima 12, 18 i 21.

66) Na koncu gimnastičke vježbe izvodilo se defiliranje. Kod prvoga prolaza išlo ih je u svakom redu 15, samo u posljednjem 14.

---

* Ova zadaća dolazi u kronologiji. Na njezinu se riješenju osniva određenje početka Julianske periode, koju je uveo Josip Scaliger.

** Iz kinezke aritmetike Sun Tsze u 3. stoljeću poslije Kr.

*** Zadaća „o pticama", koja dolazi u „Abacusu".

Kod drugoga prolaza išlo ih je u svakom redu 14, samo je u posljednjem opet bio jedan manje. Kad su po treći put htjeli da prolaze po 8 u redu, manjkalo ih je u posljednjem redu čak 5. Koliko je učenika stupalo u redovima?

67) S trga u velikom gradu idu dvije linije konjske željeznice (tramwaya) i jedna linija omnibusa. Prva linija konjske željeznice otpušta kola svakih 5 minuta, druga svakih 12 minuta, dočim omnibus odlazi samo svakih 18 minuta. Prva kola polaze na svim linijama u 8 sati u jutro. U koje će doba dana opet poći sva troja kola u isti čas?

Šesti odsječak.

Računske operacije trećega stupnja. (Dio I.).

Kvadriranje i izvodi. Kvadratične jednadžbe.

§. 24. Kvadrat i drugi korijen.

I. $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$;
II. $(a : b)^2 = a^2 : b^2$;
III. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
IV. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
V. $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$.

Definicija drugoga korijena: VI. $(\sqrt{q})^2 = q$;

VII. $\sqrt{q^2} = q$;
VIII. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
IX. $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$.

§. 24. A.

U zadaćama, što dolaze, neka se izvedu naznačena kvadriranja:

1) 9^2. **2)** 15^2. **3)** $(-9)^2$. **4)** $(\frac{3}{4})^2$. **5)** $(-\frac{1}{2})^2$. **6)** $(\frac{7}{8})^2$. **7)** $(1\frac{1}{2})^2$.
8) $(ap)^2$. **9)** $(-ap)^2$. **10)** $\left(\frac{p}{q}\right)^2$. **11)** $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2$. **12)** $(7abc)^2$.
13) $\left(\frac{4ab}{5pq}\right)^2$. **14)** $[7 \cdot 5a : (bcd)]^2$. **15)** $\left(\frac{-3}{ab}\right)^2$. **16)** $\left(\frac{-a}{-b}\right)^2$.
17) $\left(\frac{4 : ab}{c}\right)^2$. **18)** $(3a^2)^2$. **19)** $(p+q)^2$. **20)** $(p+2q)^2$.
21) $(p-2q)^2$. **22)** $(4a-b)^2$. **23)** $(\frac{1}{2}a-e)^2$. **24)** $(a+b-c)^2$.
25) $(3+a+\frac{1}{3}b)^2$. **26)** $(-4+a-b)^2$. **27)** $(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}cd)^2$.
28) $(x^2-a^2)^2$. **29)** $(3ab-2ac)^2$. **30)** $(2x^2+1)^2$.
31) $(x^2+x+1)^2$. **32)** $(a-b+c+d)^2$. **33)** $(2a+b+c-d)^2$.
34) $(p-2q-2r-2s)^2$.

---

35) Ako je $x > 3$, što se može tvrditi za x^2?
36) Broj a je između granica 3 i 10, dakle $3 < a < 10$. Između kojih je granica a^2?
37) Postaje li pozitivan pravi razlomak kvadriranjem veći ili manji?

38) Učenik kaže, da je pljoština kvadrata, kojemu je stranica $1\frac{1}{2}\ m$, jednaka $1\frac{1}{4}\ m^2$, jer misli samo na to, da je $1^2 = 1$ i $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Za koliko je kvadratnih metara rekao premalenu pljoštinu toga kvadrata?

39) Zašto je bolji izraz „meterkvadrat" od običnoga „kvadratni metar"?

40) Kako ćeš izračunati sumu $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4$, da ne računaš pojedine članove te sume?

---

§. 24. B.

(Kvadratni korijen.)

41) Kako se može pisati $16^2 = 256$ s pomoću znaka korijena?

42) Što daje $\sqrt{277893^2}$?

43) Izračunaj najkraćim načinom: a) $\sqrt{(4a+b)^2}$; b) $(\sqrt{1331})^2$;

c) $(\sqrt{4x^2+6xy+9y^2})^2$; d) $\sqrt{\left(\frac{3xy}{a-b+c}\right)^2}$.

44) Kako se može kvadratni broj a pisati kao produkt dvaju jednakih faktora?

45) Ujednostruči: a) $\sqrt{p}\cdot\sqrt{p}$; b) $\sqrt{p-q}\cdot\sqrt{p-q}$;

c) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$; d) $\sqrt{3ab}\cdot\sqrt{3ab}$; e) $\sqrt{p:q}\cdot\sqrt{p:q}$.

Ujednostruči ili izračunaj najkraćim načinom ove izraze:

46) $\sqrt{a^2b^2}$. **47)** $\sqrt{(a+b)^2:c^2}$. **48)** $\sqrt{9a^2:16}$. **49)** $\sqrt{49^2\cdot(a-bc)^2}$.

50) $\sqrt{\frac{16^2:9^2}{12^2}}$. **51)** $\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{p^2q^2}}$. **52)** $\sqrt{\frac{b^2c^2(100e^2)}{7258^2(a^2)^2}}$. **53)** $\sqrt{\frac{b^5c^5d^3}{b^3c^3d}}$.

54) $\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab}}$. **55)** $\sqrt{\frac{100}{a^2+2ab+b^2}}$. **56)** $\sqrt{\frac{a^3}{a}}$.

57) $\sqrt{13^2-12^2}$. **58)** $\sqrt{16+9}$. **59)** $\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{25}}$.

---

60) Dokaži, da je: a) $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$; b) $\frac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\frac{b}{a^2}}$.

61) Ujednostruči prema predašnjoj zadaći izraze:

a) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2}}$; b) $\frac{ab}{p}\sqrt{\frac{q^2p^2}{25a^4b^4}}$; c) $\frac{4a}{5b}\sqrt{\frac{25b^2c}{16a^2d}}$.

§. 24. C.

62) Dokaži formulu $(a+1)^2 = a^2 + [(a+1)+a]$.

63) S pomoću predašnje formule sastavi tablicu kvadratnih brojeva između 30^2 i 50^2; n. pr. $31^2 = 30^2 + (31+30) = 900 + 61 = 961$ i t. d.

64) Koji su od brojeva, što dolaze, kvadratni brojevi:

a) 625; b) $\frac{216}{289}$; c) $\frac{841}{289}$; d) 1000; e) $\frac{256}{10}$; f) $25\cdot6$;

g) $0\cdot256$; h) $2\cdot56$; i) 160000; k) $\frac{8}{18}$; l) $\frac{725}{116}$; m) $\frac{726}{116}$?

65) Supstituiraj u formulu za $(a+b+c)^2$: a) $a=200$, $b=30$, $c=4$; b) $a=700$, $b=80$, $c=6$; c) $a=800$, $b=80$, $c=8$.

66) Kvadriraj po formulama za $(a+b+c)^2$ i t. d. i po Hornerovu načinu ove brojeve:

a) 4236; b) 7861; c) 1027; d) 2365; e) 9999; f) 12346; g) 473252; h) 50039.

67) Izračunaj:

a) $\left(\frac{37}{83}\right)^2$; b) $\left(\frac{69}{214}\right)^2$; c) $(3\frac{7}{69})^2$; d) $(33\cdot7)^2$; e) $(3\cdot37)^2$;

f) $(4\cdot236)^2$; g) $(0\cdot337)^2$; h) $\left(\frac{803}{3\cdot37}\right)^2$; i) $(-3\cdot7)^2$;

k) $(0\cdot0037)^2$.

68) Izračunaj:

a) $\sqrt{324}$; b) $\sqrt{1849}$; c) $\sqrt{7921}$; d) $\sqrt{17956}$; e) $\sqrt{24336}$;

f) $\sqrt{136161}$; g) $\sqrt{207936}$; h) $\sqrt{5602689}$.

69) Izračunaj:

a) $\sqrt{\frac{324}{49}}$; b) $\sqrt{\frac{1849}{2500}}$; c) $\sqrt{3\cdot24}$; d) $\sqrt{1\cdot7956}$; e) $\sqrt{179\cdot56}$;

f) $\sqrt{0\cdot1849}$; g) $\sqrt{7921\cdot1849}$; h) $\sqrt{0\cdot007921}$;

i) $\sqrt{\frac{20\cdot7936}{0\cdot25\cdot0\cdot0324}}$; k) $\sqrt{\frac{3240000}{2\frac{1}{4}\cdot(2-\frac{1}{25})}}$; l) $\sqrt{1\frac{651}{1849}}$.

70) Izračunaj:

a) $\sqrt{7{,}365796}$; b) $\sqrt{1{,}006009}$; c) $\sqrt{866{,}595844}$;

d) $\sqrt{455789{,}714884}$; e) $\sqrt{4835{,}547351{,}610000}$.

71) Izračunaj:

$\sqrt{0\cdot0064}\cdot\sqrt{102\cdot01}\cdot\sqrt{\frac{10}{6\cdot4}}:\sqrt{14042\frac{1}{4}}$.

72) Odredi srednju geometričku proporcionalu (§. 18. E.) k brojevima: a) 4 i 9; b) 20 i 45; c) 108 i 147; d) 1000 i 810; e) 972 i 5547; f) 35912 i 392; g) $\frac{14}{27}$ i $\frac{24}{7}$; h) $\frac{343}{432}$ i $\frac{7}{12}$.

§. 24. D.

Neka se kvadriraju ovi izrazi:

73) $3a-25b$. **74)** $a-b+2c$. **75)** $3a-4b+15c$.

76) $\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}b+4c$. **77)** $p+\frac{3}{4}q+\frac{r}{9}$. **78)** $-a+\frac{1}{2}b+0{\cdot}1c$.

79) $a-b+2c+3d$. **80)** $3a+4b-\frac{1}{2}c+d$.

81) $a+2b+3c+1$. **82)** a^2-b^2+ab. **83)** $a^2-3ab+5b^2$.

84) a^2-a-1. **85)** a^3+3a^2+3a+1. **86)** x^3-2x^2-x-1.

87) $4x^3+\frac{1}{2}x^2+2x-5$. **88)** $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

89) $3ab+4ac+5bc$. **90)** $3a^2b-ac^2+bc^2$.

91) $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$. **92)** $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3$.

Odredi kvadratne korijene ovih agregata:

93) $4a^2+12ab+9b^2$. **94)** $16x^2+56xy+49y^2$.

95) $25a^2-30ab+9b^2$. **96)** $64x^2-96xy+36y^2$.

97) $\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{4}$. **98)** $\frac{x^2}{25}+\frac{xy}{15}+\frac{y^2}{36}$.

99) $\frac{a^2}{10}-\frac{ab}{10}+\frac{b^2}{25}$. **100)** $\frac{x^2}{9}-\frac{xy}{42}+\frac{y^2}{49}$.

101) $1{\cdot}44a^2+5{\cdot}04ab+4{\cdot}41b^2$. **102)** $11{\cdot}56x^2+5{\cdot}44xy+0{\cdot}64y^2$.

103) $-12x^3+9x^4+46x^2+49-28x$.

104) $4x^6+x^2+9-4x^4+12x^3-6x$.

105) $x^8-6x^7+9x^6-14x^5+44x^4-6x^3+49x^2-14x+1$.

106) $4+121x^6+114x^3+154x^5+159x^4+53x^2+20x$.

107) $4p^2q^2-40pq^2s+56p^2qs+100q^2s^2-280pqs^2+196p^2s^2$.

108) $\frac{16}{9}a^2-\frac{40ab}{3}+25b^2-8ac+30bc+9c^2$.

109) $\frac{a^2}{25p^2}-\frac{a}{5}+\frac{1}{4}p^2+1{\cdot}2-\frac{3p^2}{a}+\frac{9p^2}{a^2}$.

110) $p^4+2p^3+p^2+2p+4+\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^4}$.

111) Neka se pretvore u algebraičke sume ovi izrazi:

a) $\sqrt{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}}$;

b) $\sqrt{\sqrt{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}}$.

---

112) Kolika je stranica kvadrata, kojemu je pljoština:
a) $61{\cdot}6225\ m^2$; b) $437{\cdot}5\ m^2$; c) $0{\cdot}371\ m^2$?

113) Kolik je polumjer r kruga, kojemu je pljoština:
a) $P=296091{\cdot}97\ dm^2$; b) $P=397{\cdot}6078\ m^2$;
c) $P=96{\cdot}7689\ m^2$.
(Formula: $r=\sqrt{\frac{P}{\pi}}$; $\pi=3{\cdot}1416$).

114) Neka se izračuna hipotenuza c pravokutnoga trokuta, ako su katete:
a) $a=552\ mm$, $b=385\ mm$;
b) $a=5{\cdot}28\ m$, $b=4{\cdot}55\ m$;
c) $a=80{\cdot}96\ m$, $b=30{\cdot}03\ m$.
(Formula: $c=\sqrt{a^2+b^2}$).

115) Neka se izračuna na 3 decimale točno trajanje jednoga njihaja t matematičnoga njihala, ako mu je dužina:
a) $l=2{\cdot}75\ m$; b) $l=1{\cdot}35\ m$; c) $l=0{\cdot}785\ m$; po formuli:
$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. ($g=9{\cdot}81\ m$; $\pi=3{\cdot}1416$).

116) Neka se odredi pljoština trokuta po Heronovoj formuli:
$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje su a, b i c stranice trokuta, a s znači polovinu trokutova opsega:

α)	β)	γ)
$a=5{\cdot}1\ m$;	$a=9{\cdot}2\ m$;	$a=64{\cdot}4\ m$;
$b=5{\cdot}8\ m$;	$b=7{\cdot}5\ m$;	$b=61{\cdot}7\ m$;
$c=4{\cdot}1\ m$;	$c=2{\cdot}9\ m$;	$c=11{\cdot}1\ m$.

§. 24. E.

117) Odredi rastvaranjem u faktore:
a) $\sqrt{9216}$; b) $\sqrt{270400}$; c) $\sqrt{58564}$.

118 Izračunaj:
a) $\sqrt{3\,.\,8748}$; b) $\sqrt{5^3.81920}$; c) $\sqrt{2^4.3^3.7\,.\,1029}$.

119) Odredi rastvaranjem u faktore:
$\sqrt{\frac{2187.13{\cdot}31.11}{3\,.\,7^2.256}}$.

120) Ako je hipotenuza pravokutnoga trokuta c, jedna kateta a, to vrijedi za drugu katetu b jednažba:
$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$.
Odredi prema ovoj formuli b, ako je $c=85\ m$; $a=36\ m$.
Odredi na isti način vrijednost druge katete u ovim pravokutnim trokutima:

121) a) $c = 41\ m$, $a = 40\ m$; b) $c = 17\ m$, $a = 15\ m$.

122) a) $c = 29\ m$, $a = 20\ m$; b) $c = 65\ m$, $a = 33\ m$.

123) a) $c = 65\ m$, $a = 16\ m$; b) $c = 325\ m$, $a = 36\ m$.

124) a) $c = 617\ m$, $a = 105\ m$; b) $c = 85\ m$, $a = 13\ m$.

125) Neka se odredi polumjer ϱ kruga upisanoga trokutu, koji ima stranice $a = 15\ m$, $b = 14\ m$, $c = 13\ m$.

$\left(\text{Formula } \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\right)$.

126) Neka se odredi ϱ zgodnim rastvaranjem u faktore za trokute:

a) $a = 28\ cm$, $b = 25\ cm$, $c = 17\ cm$;

b) $a = 40\ m$, $b = 39\ m$, $c = 25\ m$;

c) $a = 50\ m$, $b = 41\ m$, $c = 39\ m$.

§. 24. F.

127) Koja dva broja daju kvadriranjem:

a) 16; b) 289; c) 2·89; d) $\frac{4}{9}$; e) $2\frac{1}{4}$; f) $\frac{27}{300}$?

128) Zna se za stalno, da je $a^2 = b^2$. Zna li se onda za stalno i to, da je $a = b$?

129) Zna se, da je x negativan broj i da je $x^2 = 100$. Kolik je x?

130) Može li se iz nejednadžbe $a^2 < 100$ zaključiti:

$-10 < a < +10$?

131) Što se može zaključiti za a iz nejednadžbe $a^2 > 100$?

132) Zašto nije bezuvjetno ispravna tvrdnja, da veće radicirano daje veće?

133) Kako treba čitati znak jednakosti, kada se iz $x^2 = a^2 - 2ab + b^2$ izvodi, da ja $x = a - b$?

U Zadaćama, koje dolaze, neka se uzmu kvadratni korijeni jednoznačno (n. pr. $\sqrt{9} = 3$; $-\sqrt{4} = -2$) i neka se izračunaju izrazi:

134) a) $50 + \sqrt{1849}$; b) $50 - \sqrt{18 \cdot 49}$; c) $7\frac{1}{2} - \sqrt{36}$; d) $7\frac{1}{2} + \sqrt{36}$.

135) a) $10 - \frac{1}{10}\sqrt{24336}$; b) $10 - \frac{1}{100}\sqrt{24336}$.

136) a) $\sqrt{243 \cdot 36} - \sqrt{225}$; b) $\sqrt{7921} - \sqrt{6400} + 3\sqrt{4900}$;

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{361} - \frac{1}{5}\sqrt{400}$.

§. 24. G.

137) Koji su od ovdje zabilježenih kvadratnih korijena za sada neizvedivi:

a) $\sqrt{25}$; b) $\sqrt{-25}$; c) $\sqrt{26}$; d) $\sqrt{10}$; e) $\sqrt{16 - 25}$;

f) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; g) $\sqrt{\frac{72}{7 + 43}}$; h) $\sqrt{0 \cdot 4}$; i) $\sqrt{-(-4)}$; k) $\sqrt{-4 + 29}$?

§. 25. Iracionalni brojevi. Računanje s iracionalnim korijenima.

(Treće raširivanje područja brojeva.)

Definicija: Neka bude $(\sqrt{a})^2 = a$ i onda, ako je a pozitivan, ali nije kvadrat.

§. 25. A.

1) Što znači:

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; c) $\sqrt{0 \cdot 24}$; d) $\sqrt{a^2 + b^2}$?

2) Izračunaj:

a) $(\sqrt{3})^2$; b) $(\sqrt{3})^4$; c) $(\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{2})^2$; d) $(\sqrt{35} \cdot \sqrt{7} : \sqrt{5})^2$.

3) Pretvori u jedan kvadratni korijen:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$; b) $\sqrt{\frac{4}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{2}}$; c) $\sqrt{13\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4}{15}} : \sqrt{2}$.

4) Izvedi naznačene divizije:

a) $\sqrt{363} : \sqrt{3}$; b) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$; c) $\sqrt{27} : \sqrt{3}$; d) $\sqrt{ab} : \sqrt{b}$;

e) $\sqrt{\frac{x}{y}} : \sqrt{\frac{y}{x}}$.

5) Izračunaj:

a) $(\sqrt{363} : \sqrt{3})(\sqrt{7} : \sqrt{11})$; b) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ac}$.

§. 25. B.

6) Među koja se dva zasebična cijela broja mogu smjestiti ovi pravi kvadratni korijeni:

a) $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{200}$; c) $\sqrt{20 \cdot 3}$; d) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; e) $\sqrt{\frac{437}{5}}$; f) $\sqrt{25 + 36}$?

7) Smjesti prave kvadratne korijene, što dolaze, među dvije granice, koje se razlikuju za $\frac{1}{1000}$ t. j. izračunaj ih na tri decimale:

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{19}$; d) $\sqrt{300}$; e) $\sqrt{1000}$.

8) To isto uradi s korijenima:

a) $\sqrt{2 \cdot 5}$; b) $\sqrt{0 \cdot 144}$; c) $\sqrt{\frac{11}{9}}$; d) $\sqrt{\frac{1}{5}}$; e) $\sqrt{17 \cdot 19}$;

f) $\sqrt{25 + 36}$.

9) Smjesti među dvije granice, koje se razlikuju tek za $\frac{1}{400}$, ove kvadratne korijene:

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{11}$; c) $\sqrt{11 \cdot 3}$; d) $\sqrt{122}$.

§. 25. C.

10) Izračunaj najbolje decimalne razlomke s četiri decimale, koje se mogu približno uzeti za ove kvadratne korijene:

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{5 \cdot 278}$; c) $\sqrt{3 \cdot 1416}$; d) $\sqrt{27 \cdot 5102}$; e) $\sqrt{3\frac{3}{4}}$.

11) Izračunaj najbolje decimalne razlomke s pet decimala, koji se mogu približno uzeti za kvadratne korijene brojeva između 1 i 10.

12) Izračunaj najbržim načinom na pet decimala $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Naputak. $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2.3}{3.3}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{6}=\frac{1}{3}.2{\cdot}44949=0{\cdot}81649.$

13) Izračunaj prema uzorku predašnje zadaće na četiri decimale:

a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; b) $\sqrt{18}$; c) $\sqrt{162}$; d) $\sqrt{125}$.

14) Izračunaj isto tako na četiri decimale:

a) $\sqrt{\frac{1}{7}}$; b) $\sqrt{2\frac{2}{3}}$; c) $\sqrt{1\frac{1}{16}}$; d) $\sqrt{5}:\sqrt{8}$;

e) $\sqrt{\frac{2}{7}}.\sqrt{4\frac{2}{3}}$; f) $\sqrt{0{\cdot}0006}$.

§. 25. D.

15) Smjesti među dvije granice, koje se razlikuju tek za jednu desetisućinu, korijene ovih jednadžbi:

a) $x^2=2$; b) $x^2-7=0$; c) $3x^2=15$; d) $x=5:x$.

16) Izračunaj na tri decimale:

a) $-\sqrt{11}$; b) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) $-\sqrt{\frac{2\,4}{2\,5}}$.

17) Odredi na tri decimale srednju geometričku proporcionalu brojeva:

a) 1 i 2; b) 2 i 3; c) 5 i 25; d) 10 i 100; e) 432 i 433; f) 1 i 501; g) $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$; h) $\frac{4}{11}$ i 0·3; i) -4 i -3.

18) Zašto imaju dva broja za pravo dvije srednje geometričke proporcionale?

19) Izračunaj na dvije decimale:

a) $\frac{1}{2}\sqrt{12}-1$; b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; c) $\sqrt{17}-4$; d) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}$;

e) $\sqrt{\sqrt{3}}$; f) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}.\sqrt{33-8\sqrt{17}}$.

§. 25. E.

20) Smjesti pred korijen faktore, koji su više nego jedan put u brojevima:

a) $\sqrt{50}$; b) $\sqrt{32}$; c) $\sqrt{48}$; d) $\sqrt{240}$; e) $\sqrt{1728}$.

21) Isto uradi kod izraza:

a) $\sqrt{10240}$; b) $\frac{4}{3}\sqrt{63}$; c) $0{\cdot}12.\sqrt{70000}$; d) $\frac{7}{16}\sqrt{3\frac{2\,9}{4\,9}}$.

22) Isto uradi u primjerima:

a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{18}$; c) $\sqrt{a^3}$; d) $\sqrt{a^7}$; e) $\sqrt{a^5b^3}$.

23) Smjesti pod korijen faktor, koji je pred njim, u izrazima:

a) $5\sqrt{2}$; b) $\frac{7}{2}\sqrt{12}$; c) $3\frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{15}}$; d) $\frac{4}{9}\sqrt{\frac{243}{0{\cdot}16}}$.

24) Isto učini u primjerima:

a) $3\sqrt{8}$; b) $5\sqrt{80}$; c) $8\sqrt{75}$; d) $6\sqrt{150}$.

25) Isto učini u izrazima:

a) $2\sqrt{2}$; b) $7\sqrt{5}$; c) $3\frac{1}{2}\sqrt{8}$; d) $4\sqrt{0{\cdot}125}$; e) $6\sqrt{3\frac{1}{2}}$.

26) Isto učini u izrazima:

a) $2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}+5\sqrt{0{\cdot}2\sqrt{0{\cdot}2}}$; b) $4\sqrt{0{\cdot}25\sqrt{0{\cdot}25\sqrt{0{\cdot}25}}}$.

27) Isto uradi u izrazima:

a) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; b) $(a+b)\sqrt{\frac{ab}{a^2+2ab+b^2}}$; c) $ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$.

Neka se transformiraju u razlomke s racionalnim nazivnikom ovi razlomci:

28) a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$.

29) a) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; b) $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$; c) $\frac{3}{3+\sqrt{6}}$; d) $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$.

30) a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

31) a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; c) $\frac{12}{4-\sqrt{7}}$; d) $\frac{11}{5+\sqrt{3}}$.

32) a) $\frac{13}{5+2\sqrt{3}}$; b) $\frac{14}{8-5\sqrt{2}}$; c) $\frac{12}{7-3\sqrt{5}}$; d) $\frac{5\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

33) a) $\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}+3}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; c) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; d) $\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}$.

34) a) $\frac{3+\sqrt{2}}{7-4\sqrt{3}}$; b) $\frac{47}{4\sqrt{3}-1}$; c) $\frac{86}{4\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}\sqrt{2}-1}$.

35) a) $\frac{79}{4-\sqrt{\frac{1}{5}}}$; b) $\frac{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; c) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{15})13}{2\sqrt{15}-\sqrt{21}}$;

d) $\frac{4+\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-2\sqrt{2}}$.

36) a) $\frac{23}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $\frac{28}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{3}}$; c) $\frac{6\frac{1}{2}\sqrt{3}-7\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{21}+\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt{14}}$.

Ujednostruči ove algebraičke sume:

37) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$. **38)** $\sqrt{50}-\sqrt{32}$. **39)** $2\sqrt{27}+3\sqrt{48}$.

40) $7\sqrt{45}+2\sqrt{80}$. **41)** $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}$. **42)** $\sqrt{8}+\sqrt{50}+\sqrt{72}$.

43) $\sqrt{5}+2\sqrt{20}$. **44)** $7\sqrt{11}-\sqrt{11}+18\sqrt{11}+2\sqrt{44}$.

45) $\sqrt{27}+3\sqrt{3}-\sqrt{75}$. **46)** $4\sqrt{8}-\sqrt{98}+\sqrt{242}-\sqrt{200}-\frac{2}{5}\sqrt{50}$.

47) $3\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt{486}-3\sqrt{600}+1{\cdot}2\sqrt{2400}+\sqrt{294}$.

48) $3\sqrt{a}-\sqrt{a}+7\sqrt{4a}-\sqrt{9a}+\sqrt{81a}+\sqrt{144a}$.

49) $\sqrt{a+b}+\sqrt{16a+16b}+\sqrt{25a+25b}-\sqrt{52a-b-(3a-50b)}$.

Ukloni nazivnike ispod korijena u izrazima:

50) a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; b) $\sqrt{\frac{11}{24}}$; c) $\sqrt{1\frac{1}{8}}$; d) $\sqrt{\frac{2\,7}{9\,8}}$.

51) a) $\sqrt{\frac{7\,1}{2}}$; b) $\sqrt{1\frac{1\,9}{2\,5}}$; c) $\sqrt{1{\cdot}4}$; d) $\sqrt{0{\cdot}289}$.

52) a) $\frac{9\,1}{3}\sqrt{\frac{1}{1\,3}}$; b) $\frac{1\,8}{1\,1}\sqrt{\frac{1\,1}{1\,2}}$.

53) a) $\sqrt{\frac{5{\cdot}4}{2{\cdot}4}}$; b) $\sqrt{\frac{0{\cdot}8}{3{\cdot}6}}$; c) $\sqrt{\frac{4{\cdot}4}{0{\cdot}96}}$; d) $\sqrt{\frac{0{\cdot}15}{5{\cdot}4}}$.

54) a) $2a\sqrt{\frac{5}{8a^2}}$; b) $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{11}{12}a^2}$; c) $2ax\sqrt{\frac{17x^2}{24a}}$; d) $\frac{3}{a^2}\sqrt{\frac{13a^7}{18x}}$.

Neka se izvedu naznačene multiplikacije i pri tom ujednostručuje, što se više može:

55) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}).\sqrt{7}$. **56)** $(4\sqrt{8}-\sqrt{32}+2\sqrt{50}).\sqrt{2}$.

57) $(\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{7}{8}\sqrt{\frac{8}{4\,9}}-\frac{1}{2}\sqrt{288}).\sqrt{50}$. **58)** $(7\sqrt{75}-3\sqrt{150}+2\sqrt{243}).\sqrt{3}$.

59) $\frac{2}{5}(4\sqrt{7}-\frac{1}{2}\sqrt{243}+\sqrt{112}).\sqrt{63}$. **60)** $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)$.

61) $(\sqrt{5}-7)(\sqrt{5}+7)$. **62)** $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

63) $(\sqrt{14}+\sqrt{13})(\sqrt{14}-\sqrt{13})$. **64)** $(2\sqrt{7}+1)(2\sqrt{7}-1)$.

65) $(5\sqrt{17}-12)(5\sqrt{17}+12)$. **66)** $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$.

67) $(7\sqrt{5}+5\sqrt{7})(7\sqrt{5}-5\sqrt{7})$. **68)** $(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)$.

69) $(\sqrt{x}-y)(\sqrt{x}+y)$. **70)** $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

71) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$. **72)** $(a\sqrt{b}+b)(a\sqrt{b}-b)$.

73) $(x-a\sqrt{y})(x+a\sqrt{y})$. **74)** $(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})$.

75) $(2-\sqrt{2})(9\sqrt{5}-1)$. **76)** $(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})$.

77) $(\sqrt{30}-\sqrt{5}-\sqrt{6})(2\sqrt{12}-\sqrt{15})$.

78) $(6+\sqrt{24}+\sqrt{60})(2+\sqrt{6}-\sqrt{10})$.

79) $(4\sqrt{75}-\sqrt{242}-\frac{1}{3}\sqrt{33})(\sqrt{11}-\frac{1}{4}\sqrt{3}+\sqrt{33})$.

80) $(\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{8}})(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{8})$.

S pomoću formule $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ razvij ove izraze:

81) a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; b) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2$; c) $(\sqrt{12}+\sqrt{3})^2$.

82) a) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$; b) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2$; c) $(\sqrt{72}-\sqrt{2})^2$.

83) a) $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; b) $(3\sqrt{27}+\sqrt{3})^2$; c) $(\sqrt{12}+2\sqrt{5})^2$.

84) a) $(5\sqrt{10}-4\sqrt{13})^2$; b) $(3\sqrt{15}-8\sqrt{3})^2$; c) $(7\sqrt{13}-13\sqrt{7})^2$.

85) a) $(a+\sqrt{b})^2$; b) $(\sqrt{m}-n)^2$; c) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

86) a) $(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})^2$; b) $(\sqrt{m+3}+\sqrt{m})^2$; c) $(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})^2$.

87) a) $(\sqrt{6a+5}-\sqrt{5a+6})^2$; b) $(\sqrt{5m+7n}+\sqrt{7m-5n})^2$.

88) a) $\left(\sqrt{\sqrt{27}+5}-\sqrt{\sqrt{27}-5}\right)^2$; b) $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)^2$.

89) a) $(7-\sqrt{7}.\sqrt{3}+3).(\sqrt{7}+\sqrt{3})$; b) $(\sqrt{5}-2)(5+2\sqrt{5}+4)$.

Pretvori u jedan korijen i ujednostruči što više:

90) a) $\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$; b) $\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

91) a) $\sqrt{3\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{3\sqrt{2}-1}$; b) $\sqrt{5\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt{5\sqrt{3}-2}$.

92) a) $\sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2a}}$.

93) a) $\sqrt{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{\sqrt{11}-2}\cdot\sqrt{14-\sqrt{22}}$.

94) a) $\sqrt{9+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{9\sqrt{3}-6\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{4+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{2}}$.

95) $\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2\sqrt{21}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{3\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

Pretvori u jedan korijen izraze:

96) a) $(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}$; b) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\cdot\sqrt{17+4\sqrt{6}}$.

97) a) $(\sqrt{7}-3)\cdot\sqrt{8+3\sqrt{7}}$; b) $(3\sqrt{15}-\sqrt{65})\cdot\sqrt{9\sqrt{13}+20\sqrt{3}}$.

98) a) $(\sqrt{6}+\sqrt{14})\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}$; b) $(1+\frac{1}{2}\sqrt{3})\cdot\sqrt{1\frac{3}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}8}$.

Rastavi s pomoću formule

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - q^2}} = \sqrt{\frac{a+q}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-q}{2}}$$

u algebraičku sumu dvaju korijena ove korijene:

99) a) $\sqrt{31+\sqrt{600}}$; b) $\sqrt{\frac{9}{8}-\sqrt{\frac{9}{8}}}$; c) $\sqrt{11-3\sqrt{8}}$.

100) a) $\sqrt{100-2\sqrt{2499}}$; b) $\sqrt{7+\sqrt{40}}$; c) $\sqrt{16+\sqrt{231}}$.

101) a) $\sqrt{20-6\sqrt{11}}$; b) $\sqrt{21-\sqrt{80}}$; c) $\sqrt{17+\sqrt{280}}$.

102) a) $\sqrt{1-\frac{4}{9}\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{\frac{51}{4}-9\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{30\frac{3}{4}+3\sqrt{66}}$.

103) Odredi, jesu li racionalni ili iracionalni izrazi:

a) $\sqrt{27}:\sqrt{3}$; b) $\sqrt{18\cdot 49}$; c) $\sqrt{7}.\sqrt{0{\cdot}63}$; d) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$;
e) $2\sqrt{5}-\sqrt{20}$; f) $2-\sqrt{2}$; g) $2\sqrt{24}+\sqrt{216}-\sqrt{600}$;
h) $11+\sqrt{363}.\sqrt{3}$.

104) Koji je od brojeva, što dolaze, doduše iracionalan broj, ali nije jednak kvadratnomu korijenu iz racionalnoga broja:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}+\sqrt{12}$; c) $\sqrt{(3+\sqrt{21})(\sqrt{21}-3)}$;
d) $\sqrt{3+\sqrt{21}}$; e) $4\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{6}$; f) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2\cdot 5$; g) $\frac{\sqrt{10}-2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;
h) $\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$.

105) Odredi konjugirane iracionalne brojeve k brojevima:

a) $1+\sqrt{3}$; b) $3-\sqrt{11}$; c) $13-2\sqrt{5}$; d) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{23}$;
e) $\sqrt{5}+1$; f) $3\sqrt{7}-2$.

106) Adiraj i multipliciraj svaki od brojeva zabilježenih u predašnjoj zadaći sa svojim konjugiranim iracionalnim brojem. Kakovi su brojevi te sume i ti produkti?

§. 26. Imaginarni brojevi.

(Četvrto raširivanje područja brojeva.)

Definicija: Neka bude $(\sqrt{a})^2 = a$ i onda, ako je a negativan.

1) $\sqrt{-b} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{b} = i\sqrt{b}$; 2) $-\sqrt{-b} = -\sqrt{-1}\cdot\sqrt{b} = -i\sqrt{b}$; 3) $i^2 = -1$; 4) $(-i)^2 = -1$;
5) $i^3 = -i$; 6) $i^4 = +1$.

§. 26. A.

1) Što znači:

a) $\sqrt{-3}$; b) $\sqrt{-a}$; c) $\sqrt{-\pi}$?

2) Izračunaj:

a) $(\sqrt{-11})^2$; b) $(\sqrt{-16})^2$; c) $(\sqrt{-\frac{4}{5}})^2$; d) $\left(\sqrt{1-\sqrt{2}}\right)^2$;
e) $\sqrt{-2}.\sqrt{-2}$.

3) Koji su od brojeva ovdje zabilježenih imaginarni:

a) $\sqrt{-5}$; b) $-\sqrt{5}$; c) $-\sqrt{-5}$; d) $\sqrt{1-\sqrt{3}}$;
e) $\sqrt{0{\cdot}14-\frac{1}{7}}$; f) $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$?

4) Koja nejednadžba mora da bude ispunjena, da budu imaginarni ovi izrazi:

a) $\sqrt{1-x}$; b) $\sqrt{3-2x}$; c) $\sqrt{1+9x}$; d) $\sqrt{x\sqrt{2}-2}$?

5) Što su oba korijena jednadžbi:

a) $x^2 = -4$; b) $x^2 = -\frac{9}{16}$; c) $x = -\frac{1}{x}$?

6) Je li $\sqrt{-5}.\sqrt{-7}$ jednako $+\sqrt{35}$ ili jednako $-\sqrt{35}$?

§. 26. B.

7) Napiši kao produkte od jednoga reelnoga broja i $\sqrt{-1}$ ili $-\sqrt{-1}$ ove brojeve:

a) $\sqrt{-4}$; b) $-\sqrt{-7}$; c) $\sqrt{-0{\cdot}01}$; d) $\sqrt{1-\sqrt{2}}$;
e) $\sqrt{-25}$; f) $\sqrt{-64}$; g) $\sqrt{-121}$; h) $\sqrt{-12}$;
i) $\sqrt{-75}$; k) $\sqrt{-288}$.

8) Napiši brojeve predašnje zadaće s pomoću Gaussovih znakova $+i$ i $-i$.

9) Izračunaj:

a) $i\sqrt{-x^2}$; b) $4i\sqrt{-625}$; c) $125i\sqrt{-64}$.

10) Izračunaj:

a) $\sqrt{-12}.\sqrt{-108}$; b) $\sqrt{-21}.\sqrt{7}$; c) $(3\sqrt{-5}).(\frac{1}{5}\sqrt{-10})$.
d) $\sqrt{-1}.\sqrt{-2}.\sqrt{-3}$.

11) Izračunaj:

a) $\sqrt{-10}:\sqrt{-5}$; b) $\frac{(-\sqrt{3})(-\sqrt{-6}).\sqrt{32}}{4\sqrt{-1}}$;
c) $\frac{1}{\sqrt{-16}}$; d) $\frac{i\sqrt{7}}{\sqrt{-7}}$.

12) Izračunaj:

a) $(3\sqrt{-2})^2$; b) $(3\sqrt{-2})^3$; c) $4i^3\sqrt{-2}$.

13) Odredi vrijednosti od:

a) i^{12}; b) $-i^{16}$; c) i^{13}; d) i^{15}; e) $i^{4.23}$; f) $i^{4.23+1}$;
g) $i^{4.23+2}$; h) $i^{4.23+3}$.

14) Izračunaj:
a) $1:i^3$; b) $1:i^4$; c) $1:i^{10}$; d) $1:i^{19}$; e) $-1:i^{21}$.

15) Napiši kao produkt od jednoga reelnoga broja i znakova $+i$ $-i$ izraze:
a) $3i+15i-8i$; b) $5i+\sqrt{-9}$; c) $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}$;
d) $\sqrt{-3}+\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

§. 26. D. i E.

16) Odredi konjugirani broj k ovim kompleksnim brojevima:
a) $2+5i$; b) $\frac{1}{2}-3i$; c) $3+i\sqrt{3}$; d) $0{\cdot}25-\frac{i}{2}\sqrt{3}$;
e) $-i\sqrt{\frac{1}{2}}$; f) -19.

17) Odredi broj, koji će dati reelan broj, ako ga adiraš kompleksnomu broju i ako ga s njim multipliciraš, u primjerima:
a) $3-2i$; b) $7+i$; c) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

Svedi na oblik $a+ib$, gdje su a i b reelni, i ujednostruči što više:

18) a) $(1+2i)+(3-i)-(5-7i)$; b) $(\frac{1}{2}+i)+(\frac{1}{2}-i)+(3+2i)$;
c) $i\sqrt{2}+(3-i)-(3+i\sqrt{8})$; d) $\sqrt{-6}+i\sqrt{24}-(\sqrt{-54}+3)$.

19) a) $(4+2i)(3-5i)$; b) $(2-3i)(7-5i)$;
c) $(4-7\sqrt{-1})(8+\sqrt{-196})$; d) $(5\frac{1}{2}+2i)(\frac{1}{1\,1}-2i)$.

20) a) $(0{\cdot}4i+1)\,.\,3i$; b) $(0{\cdot}\dot{3}i-\frac{1}{3})(3+0{\cdot}\dot{3}i)$;
c) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}+2i)(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+2i)$; d) $(4\sqrt{2}-i\sqrt{3})(3\sqrt{6}-24\,i)$.

21) a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$;

b) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$;

c) $(\sqrt{37}+3i\sqrt{7})(-3i\sqrt{7}+\sqrt{37})$;
d) $(1+\sqrt{2}-3i\sqrt{5}-2i)(1+\sqrt{2}+3i\sqrt{5}+2i)$.

22) a) $(1+i)^2$; b) $(2+i\sqrt{6})^2$; c) $(\frac{1}{2}+11\,i\sqrt{6})^2-(\frac{3}{2}\sqrt{347})^2$.

23) a) $\frac{2}{1+i}$; b) $\frac{50}{3-4i}$; c) $\frac{53}{7+2i}$; d) $\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$.

24) a) $\frac{15}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$; b) $\frac{28}{\sqrt{-5}-3}$; c) $\frac{1-3i\sqrt{5}}{7+i\sqrt{5}}$.

25) a) $\frac{\sqrt{35}+i}{\sqrt{7}-3i\sqrt{5}}$; b) $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$; c) $\frac{(2+i)^2}{3-4i}$.

26) a) $\frac{p+2iq}{p-2iq}$; b) $\frac{\sqrt{a}-i\sqrt{b}}{\sqrt{a}+i\sqrt{b}}$; c) $\frac{a+ib}{b-ai}$.

27) a) $\sqrt{5+12i}$; b) $\sqrt{-32-126i}$; c) $\sqrt{2i}$; d) $\sqrt{-2i}$; e) $\sqrt{pi}$.

28) a) $\sqrt{\frac{5}{3\,6}+\frac{1}{3}i}$; b) $\sqrt{48\frac{1}{1}\frac{5}{6}-3\frac{1}{2}i}$; c) $\sqrt{-8+\sqrt{-36}}$;
d) $\sqrt{1+2i\sqrt{2}}$.

29) a) $\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}}$; b) $-\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}}$;
c) $-\sqrt{\frac{15}{4}-2i}$.

30) a) $\sqrt{7+6i\sqrt{2}}:\sqrt{7-6i\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{\frac{12+34i}{\sqrt{5}+12i}}$.

31) Po formuli $(a+bi)\,.\,(a-bi)=a^2+b^2$ neka se rastavi u produkt dvaju faktora:
a) $a+b$; b) $3x^2+5y^2$; c) $9+x$; d) $\frac{1}{2}\frac{6}{5}x^2+\frac{3}{4}y^2$.

§. 26. F.

32) Konstruiraj u Gaussovoj ravnini brojeva slike ovih brojeva:
a) $+3i$; b) $-3i$; c) $1+3i$; d) $1-3i$; e) $-1+3i$;
f) $-1-3i$; g) $-2\frac{1}{4}+1\frac{3}{4}i$; h) $1+i\sqrt{2}$; i) $\sqrt{2}+\sqrt{5}+i$;
k) $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$; l) $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$; m) $\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{3}}$.

33) Nacrtaj slike svih brojeva oblika $p+2i$ tim, da za p odabireš posebne vrijednosti. Kakova crta postaje? Kaki joj je položaj spram osovine reelnih crta?

34) Nacrtaj slike svih brojeva oblika $-4+iq$.

35) Koliku daljinu od nul-točke imaju slike brojeva:
a) $3+4i$; b) $3-4i$; c) $-3+4i$; d) $1+2i\sqrt{6}$;
e) $-2-i\sqrt{21}$.

36) Kakovu crtu daju slike svih brojeva oblika $q+i\sqrt{1-q^2}$, ako q dobiva sve reelne vrijednosti od -1 do $+1$?

37) Kakov četverokut daju slike brojeva o, p, iq i $p+iq$?

38) Kakov četverokut postaje od slika četiriju brojeva o, $a+ib$, $c+id$, $(a+c)+i(b+d)$?

---

*

§. 27. Kvadratične jednadžbe s jednom nepoznanicom.

1) Ako je $x^2 = c$, onda je $x = \pm \sqrt{c}$.

2) Ako je $x^2 + px + q = 0$, onda je:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

3) Ako je $x^2 + px + q = 0$, onda je:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

§. 27. B.

A. Čiste kvadratične jednadžbe s brojevima.

1) a) $x^2 = 144$; b) $x^2 - 6{\cdot}25 = 0$; c) $1{\cdot}1x^2 = 185{\cdot}9$.

2) a) $17x^2 - 53 = 19 + 9x^2$; b) $0{\cdot}16x^2 - 1 = 3\frac{1}{5}x^2 - 20$,
c) $3\frac{1}{2}x^2 + 86 = 104\frac{1}{2} - 1{\cdot}125x^2$.

3) a) $\frac{x}{3} = \frac{48}{x}$; b) $\frac{3x}{20} = \frac{5}{27x}$; c) $\frac{x}{7{\cdot}5} = \frac{1\frac{7}{8}}{x}$.

4) a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = 11$; b) $(4x - 6)(4x + 6) = 13$;
c) $(9 + 2{\cdot}5x)(9 - 2{\cdot}5x) + 19 = 0$.

5) a) $x(x + 5) = 5(x + 20)$; b) $18(x + 32) = 2x(9 + 2x)$
c) $(x - 4)(x - 5) = 9(4 - x)$.

6) a) $(x + 3)(x - 4) = 52 - x$;
b) $2x(x + 1) + 3(x - 12) = x(x + 5)$.

7) a) $(7 + 2x)(5x - 9) - (6 - x)(19 + 6x) + 33 = 0$;
b) $(11 + 5x)(7 - 3x) = (8{\cdot}5x - 33)(8 + 2x) + 53$;
c) $(3\frac{1}{3}x - 17)(9{\cdot}375 - 6x) - (11 - 5x)(12x - 0{\cdot}25) = 3\frac{3}{8}$.

8) a) $(x + 1)^2 = 2x + 10$; b) $(x - 1)^2 = 26 - 2x$;
c) $(x + 3)^2 = 6x + 25$.

9) a) $(2x + 3)^2 + 40 = (3x + 2)^2$;
b) $(3x - 2)^2 = (2x - 3)^2 + 175$.

10) a) $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 20$; b) $(x + 3)^2 = 50 - (x - 3)^2$.

11) a) $(7x + 5)^2 + (5x - 7)^2 = 74$;
b) $(9x + 4)^2 = 970 - (4x - 9)^2$.

12) a) $4\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2} = 0$; b) $\frac{5}{x} + 2x = 7x$;
c) $\frac{40}{x} - 9x = x$.

13) a) $\frac{3x^2}{2} + \frac{5x^2 - 1}{3} = 2\frac{5}{6}$; b) $\frac{2x^2}{3} - \frac{7x^2 - 5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

14) a) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 2\frac{2}{3}$; b) $\frac{x}{x+3} + \frac{x}{x-3} = 2\frac{1}{4}$.

15) a) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = 3\frac{1}{3}$; b) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 2\frac{4}{15}$.

16) a) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1}$; b) $x + 3 = \frac{2x + 499846}{x - 1}$.

B. Čiste kvadratične jednadžbe sa slovima.

17) a) $ax^2 = b$; b) $\frac{x^2}{a} = b$; c) $\frac{x^2}{a+b} = a - b$.

18) a) $x^2 + a = b$; b) $x^2 - 3a^2 = a^2$; c) $\frac{x^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$.

19) a) $ax^2 + b^2 = bx^2 + a^2$; b) $ax^2 + b^2 = -bx^2 + a^2$.

20) a) $x^2 - ax(x - b) = abx + 1 - a$;
b) $a^2x^2 + bx(x - a) = a^2 - abx + b$.

21) a) $(x + a)^2 = 2ax + b^2$; b) $(x - a)^2 = 2ax + a^2$.

22) a) $(x + a)^2 + (x - a)^2 = 10a^2$;
b) $(ax + b)^2 + (bx - a)^2 = a^2 + b^2$.

23) a) $\frac{a}{x} - x = bx$; b) $\frac{b - 1}{x} + x = bx$.

24) a) $\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x-a} = 1$; b) $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = 1$;
c) $\frac{x+a}{x-b} + \frac{x+b}{x-a} = \frac{2ab}{x^2 - (a+b)x + ab}$.

C. Korijeni su iracionalni ili imaginarni brojevi.

25) a) $x^2 = 15$; b) $x(x + 5) = 5(x + 7)$; c) $\frac{31}{x} = x$.

26) a) $3x^2 = 5$; b) $5x^2 - 7 = 0$.

27) a) $x^2 = -9$; b) $x^2 = -\frac{16}{25}$; c) $x^2 + 16 = 0$.

28) a) $(x + 4)^2 = 8x$; b) $x = \frac{-25}{x}$; c) $x = -\frac{1}{x}$.

29) a) $9x^2 = -2$; b) $4x^2 = -\frac{5}{9}$; c) $x^2 + \frac{7}{15} = 0$.

30) a) $x(x + \frac{3}{2}) = \frac{3(x - 5)}{2}$; b) $\frac{x - 5}{x} = x + 1$.

D. Mješovite kvadratične jednadžbe s brojevima.

§. 27. C.

31) a) $x^2 + x = 12$; b) $x^2 + 10x + 21 = 0$; c) $x^2 - 2x = 143$.

32) a) $x^2 + 2x - 24 = 0$; b) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
c) $x^2 + 6x - 27 = 0$.

33) a) $x^2+12x=13$; b) $x^2-2x=15$; c) $x^2-8x=9$.

34) a) $x^2-6x-187=0$; b) $x^2-20x-261=0$;
c) $x^2+14x+48=0$.

35) a) $x^2+1{\cdot}3x=0{\cdot}9$; b) $x^2+1{\cdot}1x=7{\cdot}82$;
c) $x^2-1{\cdot}5x=0{\cdot}16$.

36) a) $x^2+2{\cdot}3x+1{\cdot}32=0$; b) $x^2+0{\cdot}9x+0{\cdot}08=0$;
c) $x^2-2{\cdot}9x+2{\cdot}04=0$; d) $x^2-3{\cdot}7x+1{\cdot}86=0$.

37) a) $x^2+6\frac{2}{3}x=7\frac{2}{3}$; b) $x^2+4\frac{4}{5}x=13\frac{3}{5}$.

38) a) $x^2-4\frac{1}{6}x=4$; b) $x^2-7\frac{1}{4}x=6$.

---

39) a) $2x^2+7=4$; b) $3x^2+17x-6=0$;
c) $3x^2+26x-9=0$.

40) a) $4x^2+31x-8=0$; b) $2x^2-5x-18=0$;
c) $3x^2-x-30=0$.

41) a) $2{\cdot}1x^2+4{\cdot}2x=16{\cdot}8$; b) $0{\cdot}9x^2+1{\cdot}8x=2{\cdot}7$.

42) a) $2{\cdot}1x^2+8{\cdot}3x=10{\cdot}4$; b) $2{\cdot}5x^2+16{\cdot}2x=42{\cdot}4$.

43) a) $\frac{1}{6}x^2-1\frac{1}{3}x+2=0$; b) $\frac{1}{3}x^2-4\frac{1}{2}x+15=0$.

---

44) a) $7x^2-3x=5x^2+7x-8$; b) $11x^2+2x=8x^2+9x-2$.

45) a) $9x^2+5x=14x^2-3x-13$;
b) $10x^2-7x=7x^2+4x+20$.

46) a) $(5x^2+4x+3)-(x^2-3x+4)=29$;
b) $(7x^2+3x-5)-(2x^2-9x+4)=6x^2+11$.

47) a) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)=14$;
b) $(x+2)(x+3)+(x+4)(x+5)=42$.

48) a) $(5x+1)(4x-1)+(3x-1)(4x+1)=28$;
b) $(3x+5)(x+2)+(2x+5)(x+3)=8$.

49) $(x-8)(x-7)+(x-6)(x-5)=(x-9)(x+10)$.

50) $(x-10)(x-8)+(x-9)(x-7)=(x+11)(x-11)$.

51) $(x+4)(x-3)-(x+3)(x-4)=(x-5)(x+6)$.

52) $(x-5)(x+2)-(x-6)(x+1)=(x+4)(x-7)$.

53) $(5x-2)(8x-1)-(3x+1)(4x-1)=9$.

54) $(3x-4)(4x-1)-(5x-6)(2x-1)=2$.

55) a) $(x+4)^2+(2x+7)^2=(3x+5)^2$;
b) $(x+3)^2+(3x-1)^2=(3x+1)^2$.

56) a) $(3x-5)^2-(x+1)^2=(x+3)^2$;
b) $(3x+1)^2-(5x-7)^2=(x+3)^2$.

57) a) $(3x-4)^2+(2x+1)^2=(3x-2)^2+(x-1)(x+11)$;
b) $(x-1)^2+(x+3)^2=(x+1)^2+(2x-5)(3x-1)$.

58) a) $(3x+4)^2-(2x+3)^2=(2x+1)(4x+7)-(5x-2)^2$;
b) $(5x-3)^2-(3x-1)^2=(2x-1)(5x+1)-(x+1)^2$.

59) a) $(x+3)^3-x^3=63$; b) $(x+7)^3-x^3=973$;
c) $(x+5)^3-x^3=65$.

60) a) $(x-2)^3-(x-3)^3=7$; b) $(x-5)^3-(x-8)^3=117$;
c) $(x+1)^3-(x-4)^3=215$.

---

61) a) $x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{6}$; b) $x-\frac{1}{x}=\frac{7}{12}$; c) $x+\frac{6}{x}=5$.

62) a) $x-\frac{10}{x}=3$; b) $2x+\frac{1}{x}=3$; c) $5x-\frac{9}{x}=12$.

63) a) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{30}$; b) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x-1}=1$;
c) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{1}{2}$.

64) a) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{8}{3}$; b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{40}{21}$.

65) a) $\frac{2x+5}{3-x}+\frac{4x-3}{3+x}=10$; b) $\frac{2x-1}{x+2}+\frac{22-7x}{x-2}=\frac{4x-2}{x^2-4}$.

66) a) $\frac{4x-21}{2x-11}-\frac{8-x}{x-5}=1$; b) $\frac{3}{x}+\frac{5-3x}{x+1}=4$.

67) a) $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3-x}=\frac{6}{5}$; b) $\frac{5-\frac{3}{x+2}}{4}=\frac{7x+6}{12x+1}$.

E. Mješovite kvadratične jednadžbe sa slovima.

68) a) $(x+a)(x+b)-x(a+b)-a(b+a)=0$;
b) $(x-a+b)(x+a-b)=0$;
c) $(x+a+b-c)(x-a-b+c)=0$.

69) a) $(x-3a)(x+b)=0$;
b) $\left(x+\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)\left(x-\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=0$.

70) a) $x^2+ab=ax+bx$; b) $x^2+\frac{bx}{a}=ax+b$;
c) $x^2+ab=bx+abx$; d) $x^2+1=\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}$.

71) a) $(x-b)(x-c)=0$; b) $(x-a)(x+b-c)=0$;
c) $(x-a^2)\left(x-\frac{b}{a}\right)=0$.

72) a) $x\left(x+\frac{a}{b}\right)=\frac{bx}{a}+1$; b) $x^2-2ax=b^2-a^2$;
c) $a^2x^2+a^4=2a^3x+b^2$.

73) a) $\left(2x-\frac{a}{5}\right)\left(b-3\frac{3}{4}x\right)+\left(2x-\frac{a}{5}\right)(x-b)=0$;

b) $\left(4-\frac{3}{ax}\right)=\left(4a-\frac{3}{x}\right)(7x-6)$.

74) a) $x+2ab+2b^2=3[x+2b(a+b)]x$;
b) $(x-c)^2+(x-d)^2+2cd=c^2+d^2$;
c) $(x-p)^2+(x-q)^2-(p-q)^2=x^2-x(p+q)+pq$.

75) a) $\frac{x-a}{x+a}=\frac{x-b}{x+b}-\frac{a-b}{a+b}$;

b) $\frac{a-x}{x-b}-\frac{b-x}{a-x}+\frac{(a-b)^2}{(a-x)(b-x)}=1$;

c) $\frac{ax-b}{a-b}=\frac{(cx-d)x}{c-d}$.

F. Korijeni su jednadžbe iracionalni ili imaginarni.

76) a) $x^2-4x-1=0$; b) $x^2-8x+9=0$;
c) $x^2+20x+90=0$.

77) a) $x^2+22x+110=0$; b) $x^2-2x-67=0$;
c) $x^2+34x=289$.

78) a) $25x^2-20x=41$; b) $12x^2+12x=\frac{103}{3}$;
c) $1600x^2-400x-359=0$.

79) a) $\frac{1}{4}x^2-8x+48=0$; b) $1\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{19}{12}=0$;
c) $\frac{x^2}{2}-2x-1\frac{5}{16}=0$.

80) a) $\frac{(x-5)x}{x-1}-\frac{2}{x-1}=3$; b) $\frac{4}{5x(x-2)}=1+\frac{2-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}}$.

81) a) $x^2+x+1=0$; b) $x^2-4x+5=0$;
c) $x^2-6x+34=0$.

82) a) $x^2+6x+14=0$; b) $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=0$;
c) $x^2-\frac{2}{7}x+343\frac{1}{49}=0$.

83) a) $9x^2+3x+5=0$; b) $x^2-74x+1369\frac{1}{37}=0$;
c) $x^2+82x+1738\frac{16}{49}=0$.

84) a) $\frac{3x+5}{x-7}+x=1$; b) $\frac{x-13}{x-1}:\frac{x}{7}=1$;

c) $\frac{2-\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}}-\frac{116}{x(x+2)}=3$.

---

§. 27. D.

85) Odredi sumu i produkt obaju korijena u jednadžbama, što dolaze, a da ih ne riješiš:
a) $x^2-8x+7=0$; b) $x^2-15x+56=0$;
c) $x^2+16x+48=0$;
d) $x^2-30x-31=0$; e) $x^2+28x-75=0$;
f) $2x^2-16x+30=0$.

86) Napiši u normalnom obliku kvadratične jednadžbe, koje imaju ove korijene:
a) 1 i 2; b) 3 i 5; c) 7 i 3; d) -7 i 3; e) -7 i -3;
f) 7 i -3; g) 11 i 10.

U jednadžbama, što dolaze, jesu korijeni cijeli brojevi. Pogodi ih na osnovi formule 3.) na čelu ovoga paragrafa:

87) a) $x^2-(2x+6x)+2\,.\,6=0$; b) $x^2-15x+44=0$;
c) $x^2-17x+70=0$

88) a) $x^2-11x+26=0$; b) $x^2+11x-26=0$;
c) $x^2-16x+63=0$.

89) a) $x^2-5x+6=0$; b) $x^2+5x+6=0$;
c) $x^2+5x-6=0$; d) $x^2-5x-6=0$.

90) a) $x^2+24x+143=0$;
b) $x^2-(2a+3b)x+6ab=0$; c) $x^2-(a^2-b^2)x=a^2b^2$.

Kvadratični trinomi, što dolaze, neka se rastave u produkte linearnih faktora:

91) a) x^2+6x+5; b) $x^2+10x+21$; c) $x^2-3x-28$.
92) a) $x^2-15x-34$; b) $6x^2+5x-1$; c) $3x^2+11x+8$.
93) a) $5x^2+8x-21$; b) $12x^2-32x+21$; c) $15x^2-4x-35$.
94) a) $x^2-x+\frac{1}{4}$; b) $x^2-\frac{7}{12}x+\frac{1}{12}$; c) $x^2+2\frac{1}{12}x+1$.
95) a) $x^2+(e+f)x+ef$; b) $x^2-2ax-3bx+6ab$.

---

§. 27. F.

G. Iracionalne jednadžbe I. stupnja.

(Kvadrira se jedan put.)

96) a) $\sqrt{x}=3$; b) $2\sqrt{x}=8$; c) $6\sqrt{x}=42$; d) $\sqrt{x-1}=4$.

97) a) $3\sqrt{x+7}=36$; b) $5\sqrt{x+2}=45$; c) $\sqrt{x}+15=19$;
d) $3-\sqrt{x}=\frac{3}{2}$.

98) a) $2\sqrt{x}+3\sqrt{x}=20$; b) $7\sqrt{x}-15=3\sqrt{x}+9$;
c) $3\sqrt{x+1}+5\sqrt{x+1}=24$.

99) a) $12\sqrt{x-7}-23=7\sqrt{x-7}+2$; b) $\sqrt{5x-7}=\sqrt{2x+17}$.

100) a) $3\sqrt{x+18}=5\sqrt{x+2}$; b) $7\sqrt{x+5}=10\sqrt{x-46}$.

101) a) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}}=\frac{2}{3}$; b) $\frac{\sqrt{x+12}}{\sqrt{x+23}}=\frac{5}{6}$; c) $\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+16}}=\frac{10}{11}$.

102) a) $\frac{x+5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+9}$; b) $\sqrt{3x+495}=(6x+6):\sqrt{12x}$.

(Kvadrira se dva puta.)

103) a) $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=3$; b) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$.

104) a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=5$; b) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7$.

105) a) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=1$; b) $\sqrt{x+23}-\sqrt{x+2}=3$.

106) a) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=\sqrt{4x+13}$;
b) $\sqrt{x}-\sqrt{x-40}=\sqrt{4x-180}$.

107) a) $\sqrt{8x-7}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{18x-8}$;
b) $\sqrt{3x-6}-\sqrt{3x-11}=\sqrt{12x-59}$.

108) a) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-3}=\sqrt{x+13}+\sqrt{x-8}$;
b) $\sqrt{x-8}-\sqrt{x+7}=\sqrt{x-32}-\sqrt{x-21}$.

109) a) $\sqrt{x-m^2}+\sqrt{x-n^2}=\sqrt{m^2-n^2}$;
b) $\sqrt{x-m}+\sqrt{x+n}=\sqrt{4x-m+n}$;
c) $\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}=\sqrt{4ax+d}$.

H. Iracionalne jednadžbe drugoga stupnja.

110) a) $\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}=5$; b) $\sqrt{3x-11}-\sqrt{x}=3$.

111) a) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{8x+1}=5$; b) $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1$.

112) a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=\sqrt{x+23}$;
b) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-11}=\sqrt{x-3}$.

113) a) $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x(x+4)}=2(x+1)$;
b) $\sqrt{x+3+\sqrt{2x+9}}=4$.

114) $\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}+\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}=\frac{16}{3\sqrt{x-1}}$.

115) a) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{28-x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{28-x}}=\frac{\sqrt{x+25}}{\sqrt{33-x}}$;
b) $\frac{\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{7-x}-\sqrt{x-5}}=\sqrt{\frac{7-x}{x-5}}$.

116) a) $\sqrt{x}+\sqrt{ax+b}=\sqrt{b}$; b) $\sqrt{x-a}+\sqrt{ax-b^2}=\sqrt{a^2-b^2}$.

117) a) $\sqrt{x+7a}+\sqrt{x-8a}=\frac{5}{3}\sqrt{x}$;
b) $\sqrt{x+7a}-\sqrt{x-9a}=\frac{4}{3}\sqrt{x}$.

118) a) $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{b}\cdot\sqrt{b+2a}$;
b) $\sqrt{a+x}+\sqrt{x-\frac{1}{2}a}=\sqrt{x+\frac{27}{16}a}$.

119) a) $x^2-\sqrt{2}\cdot x+1=0$; b) $x^2+x\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$.

120) a) $9x^2=4+2\sqrt{3}$; b) $x^2-2x(\sqrt{5}+\sqrt{3})=45-10\sqrt{15}$.

121) a) $\frac{x-\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}}=\frac{3x}{2}$; b) $x(x+\frac{1}{2}\sqrt{3})=\frac{13}{16}$.

122) a) $x^2-2\sqrt{-9}\cdot x=25$. b) $x(x+8-2i)-8i=0$.

123) a) $\frac{x+3i}{5}+\frac{12}{ix}=i-6$; b) $x^2+5i=x(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+i)$.

124) a) $x^2+16+5i=10x+2\frac{1}{2}ix$;
b) $x^2+3x+2ix\sqrt{3}-3i\sqrt{3}=1$.

125) a) $x^2-2ax+a^2+1=0$; b) $x^2-ax+\frac{a^2}{4}+b^2=0$.

126) a) $x^2-4x+4-9i=0$; b) $\frac{x^2+q}{\sqrt{3p}}=2x-\sqrt{3p}$.

H. Trigonometričko riješavanje kvadratičnih jednadžbi.

Bilješka. Ako su u jednadžbi $x^2\pm px\pm q=0$ koeficijenti p i q veliki brojevi, ište rješavanje po formuli za x dugotrajno kvadriranje i radiciranje. Tomu se može ugnuti, ako se upotrijebe goniometričke funkcije (pomoćni kut).

Općeno riješenje.

1) Iz jednadžbe $x^2+px+q=0$ izlazi:

$$x_1=-\sqrt{q}\cdot tang\frac{\varphi}{2},\quad x_2=-\sqrt{q}\cdot Cotg\frac{\varphi}{2}.$$

2) Iz jednadžbe $x^2 - px + q = 0$ izlazi:

$$x_1 = \sqrt{q} \cdot Cotg\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = \sqrt{q} \cdot tang\frac{\varphi}{2};$$

ovdje je uveden pomoćni kut φ s jednadžbom: $Sin\,\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$.

3) Iz jednadžbe $x^2 + px - q = 0$ izlazi:

$$x_1 = \sqrt{q} \cdot tang\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{q}\,Cotg\frac{\varphi}{2}.$$

4) Iz jednadžbe $x^2 - px - q = 0$ izlazi:

$$x_1 = \sqrt{q} \cdot Cotg\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{q} \cdot tang\frac{\varphi}{2};$$

ovdje je uveden pomoćni kut φ jednadžbom: $tang\,\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$.

Riješi po ovoj metodi jednadžbe:

127) a) $x^2 + 1{\cdot}1102x = 3{\cdot}3594$; b) $x^2 + 0{\cdot}42331x = 8{\cdot}53972$.

128) a) $x^2 + 9{\cdot}125571 + 9{\cdot}74192654 = 0$;
b) $x^2 - 10{\cdot}83945x + 26{\cdot}991104 = 0$.

129) a) $7{\cdot}3527x^2 - 148{\cdot}87107 = 33\,8150x$;
b) $x^2 : 1{\cdot}2345 - 1{\cdot}54994 + 0{\cdot}6789 = 0$.

§. 27a. Primjene kvadratičnih jednadžbi s jednom nepoznanicom.

A. Čiste kvadratične jednadžbe.

I. Geometrijski primjeri.

α) Planimetrija.

1) Hipotenuza je pravokutnoga trokuta duga c centimetara, a jedna kateta a centimetara; kolika je druga kateta?
a) $c = 13\ cm$, $a = 12\ cm$; b) $c = 25\ cm$, $a = 7\ cm$.

2) Dvije su stranice nekoga trokuta duge a i b centimetara i čine kut od 120°; kolika je treća stranica?
a) $a = 2\sqrt{3}\ cm$, $b = 4 - \sqrt{3}\ cm$;
b) $a = 6\sqrt{3}\ cm$, $b = 40 - 3\sqrt{3}\ cm$.

3) Stranice su trokuta 13, 84 i 85 [20, 21 i 29] cm duge; kolika je transversala k sredini najveće stranice?

4) Kolik je polumjer kruga, kojemu je pljoština 616 [1386] cm^2 ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

5) Kateta je pravokutnoga trokuta m puta tako velika kao druga kateta. Hipotenuza je c. Kolike su katete?
a) $m = 2$, $c = 10\ cm$; b) $m = 3$, $c = 8cm$.

6) U pravokutniku je diagonala m putâ tako velika kao širina. Dužina je l. Kolika je širina?
a) $m = 4$, $l = 9\ cm$; b) $m = 7$, $l = 25\ cm$.

7) Ako se produži jedna od dviju susjednih stranica kvadrata za a, a druga pokrati za isto toliko, bit će diagonala pravokutnika sastavljena od ovih novih dviju dužina duga d. Kolika je stranica kvadrata?
a) $a = 11\frac{1}{2}\ cm$, $d = 37\ cm$; b) $a = 3{\cdot}5\ cm$, $d = 97\ cm$.

β) Stereometrija.

8) Koliki su osnovni bridovi s kvadratičnom osnovkom, ako je obujam V, a visina l?
a) $V = 36\ cm^3$, $l = 4\ cm$; b) $V = 150\ cm^3$, $l = 6\ cm$.

9) Obujam je upravne piramide s kvadratičnom osnovkom V, a visina l; koliki su bridovi sa strane?
a) $V = 32\ cm^3$, $l = 3\ cm$; b) $V = 200\ cm^3$, $l = 12\ cm$.

10) Cilindar (valjak) ima obujam V, a visinu l; kolik je polumjer osnovke? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)
a) $V = 1100\ cm^3$, $l = 3{\cdot}5\ cm$; b) $V = 924\ cm^3$, $l = 6\ cm$.

11) Kolika je stranica upravnoga stošca, kojemu je visina l, a obujam V? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)
a) $l = 12\ cm$, $V = 15400\ cm^3$; b) $l = 20\ cm$, $V = 9240\ cm^3$.

12) Kolik je premjer valjka, koji ima dužinu l i oplošje O? ($\pi = 3{\cdot}14$.)
a) $l = 12\ cm$, $O = 175{\cdot}84\ cm^2$; b) $l = 9\ cm$, $O = 226{\cdot}08\ cm^2$;
c) $l = 0{\cdot}8\ m$, $O = 1{\cdot}256\ m^2$; d) $l = 19\frac{1}{3}\ cm$, $O = 219\frac{4}{5}\ cm^2$.

13) Oplošje upravnoga krnjega stošca je O, stranica je s i polumjer donje osnovke R. Kolik je polumjer gornjega kruga? ($\pi = 3{\cdot}14$.)
a) $O = 458{\cdot}44cm^2$, $s = 20\ cm$, $R = 5\ cm$;
b) $O = 3479{\cdot}12\ cm^2$, $s = 45\ cm$, $R = 12\ cm$.

14) Dvije kugle imaju oplošje O; suma je njihovih polumjera a. Kolik je polumjer svake kugle? ($\pi = 3{\cdot}14$.)
a) $O = 5338\ cm^2$, $a = 25\ cm$; b) $O = 1456{\cdot}96\ cm^2$, $a = 14\ cm$.

II. Fizika.

α) Mehanika općena.

15) Čamac se vesla brzinom c_1 okomito na obalu preko rijeke, koja ima brzinu c_2; kolik će put prevaliti čamac za t minuta?

a) $c_1 = 4\,m$, $c_2 = 3\,m$, $t = 1$ minuta;
b) $c_1 = 6\,m$, $c_2 = 2{\cdot}5\,m$, $t = 2$ minute.

16) Parobrod prevali prividno put s prama sjeveru (N), zaista je pako prevalio put s_1, jer ga je istočnjak otklanjao od njegova pravca. Kolik bi put bio prevalio taj parobrod u istom vremenu, da je išao samo s vjetrom?
a) $s_1 = 15$ morskih milja, $s_2 = 17$ m. milja;
b) $s_1 = 21$ m. milja, $s_2 = 29$ m. milja.

17) Veslanjem dobiva čamac silu od 350 kilograma okomito na obalu, rijeka djeluje na njega silom od 120 kilograma; koja sila izvodi njegovo pravo gibanje?

18) Brod prima od parnoga stroja silu od 8400 kg prama jugoiztoku, zaista ga pako tjera sila od 8500 kg, jer pomaže sjeveroistočnjak; kojom silom djeluje taj vjetar na brod?

19) Kugla teška $12\frac{1}{3}$ kg tlači na kosinu silom od $11\frac{2}{3}$ kg; kolika se sila mora upotrijebiti, da zapriječi padanje niz kosinu?

20) Stranice su trouglaste daske duge 36, 105 i 111 cm; kako je daleko težište te daske od vrha kuta, u kojemu se sastaju dvije manje stranice?

21) Masa sunca je 324900 puta veća od mase zemlje. U kojoj daljini od svoga središta privlači zemlja meteorni kamen s istom silom, s kojom sunce privlači zemlju, kad im je daljina 148200000 kilometara?

---

22) Kojom je brzinom c bačeno tijelo vertikalno u visinu, ako u visini s još ima brzinu v?
a) $s = 78{\cdot}4\,m$, $v = 73{\cdot}4\,m$; b) $s = 705{\cdot}6\,m$, $v = 34{\cdot}3\,m$.

23) A) Kugla izbačena pod kutom α koso u visinu treba da se povrati na zemlju u daljini D. Kolika joj mora da bude početna brzina c?
a) $\alpha = 45^0$, $D = 29645\,m$; b) $\alpha = 45^0$, $D = 41405\,m$.
B) Koso u vis bačeno tijelo ima u visini h brzinu v; kolikom je početnom brzinom c bačeno?
a) $h = 10\,m$, $v = 48\,m$; b) $h = 202{\cdot}5\,m$, $v = 16\,m$.

24) α) Koliku brzinu v treba dati batu težine p, da dobije energiju gibanja (živu silu) E?
a) $p = 19{\cdot}6\,kg$, $E = 100\,mkg$; b) $p = 29{\cdot}4$ kg, $E = 54\,mkg$.
β) U cijevi puške dužine l djeluje na kuglu težine p popriječna sila barutovih plinova k; kolikom brzinom izlazi kugla iz cijevi?

a) $l = 70\,cm$, $p = 34{\cdot}3\,g$, $k = 400\,kg$;
b) $l = 80\,cm$, $p = 39{\cdot}2\,g$, $k = 625\,kg$.

25) α) S kolikom se brzinom v mora okretati tijelo težine p, koje je pričvršćeno na koncu dužine r, da bude napetost jednaka l?
a) $p = 19{\cdot}6\,g$, $r = 20\,cm$, $l = 10\,g$;
b) $p = 34{\cdot}3\,g$, $r = 14\,cm$, $l = 36\,g$.
β) Koliko je ophodno vrijeme T tijela, koje se giba s polumjerom r, ako je akceleracija centripetalne sile γ?
a) $r = 24{\cdot}5\,m$, $\gamma = 2{\cdot}42\,m$; b) $r = 39{\cdot}2\,m$; $\gamma = 3{\cdot}2\,m$.
γ) Srednja je daljina Jupitera od sunca 5·2 srednjih polumjera zemaljske staze; koliko je ophodno vrijeme toga planeta u danima po trećem Kepplerovom zakonu?

26) Cilindrična cijev s polumjerom r prelazi u kuglu s polumjerom R. Kugla i dio cijevi napunjeni su s vodom, koja prenosi tlak p čepa u cijevi na kugli i tlači njezinu stijenu tlakom P.
a) $p = 2\,kg$, $r = 1{\cdot}4\,cm$, $P = 100\,kg$; $R = ?$
b) $p = 5\,kg$, $r = 9\,cm$, $P = 410\,kg$; $R = ?$
c) $p = 3\,kg$, $P = 150\,kg$, $R = 25\,cm$; $r = ?$
d) $p = 5\,kg$, $P = 410\,kg$, $R = 4{\cdot}1\,cm$; $r = ?$

27) Kolika treba da bude debljina d žice, koja ima dužinu l i specifičnu težinu s, da dade ton s brojem titraja n u sekundi, ako je napetost žice p?
a) $l = 1\,m$, $s = 7$, $n = 440$ (ton ā), $p = 851{\cdot}84\,kg$;
b) $l = 1{\cdot}6\,m$, $s = 3{\cdot}43$, $n = 441\frac{1}{4}$ (ton E_1), $p = 4{\cdot}7916\,kg$.

28) Jakosti dvaju izvora svjetlosti jesu u omjeru $m : n$. Prvi je d_1 daleko od Bunsenova fotometra; u kojoj daljini treba da bude na drugoj strani fotometra drugi izvor svjetlosti, ako hoćemo da nestane pjege?
a) $m : n = 16 : 25$; $d_1 = 8\,cm$; b) $m : n = 36 : 49$; $d_1 = 12\,cm$.

29) Na termometru ima kugljica polumjer R, a nula skale ima daljinu a od kugle; kolik je polumjer r cijevi, ako su stupnjevi skale među sobom udaljeni za d? (Koeficient rastezanja žive = 0·00018).

30) Neelastična kugla s težinom p_1 udari o drugu neelastičnu kuglu s težinom p_2, koja se giba istim smjerom. Tim se uveća temperatura za t^0; kolika je diferencija brzina d?
a) $p_1 = 106\,kg$, $p_2 = 4\,kg$, $t = 44^0$;
b) $p_1 = 16\,kg$, $p_2 = 53\,kg$, $t = 345^0$.

31) Kako treba sastaviti n galvanskih elemenata s unutrašnjim otporom od w_1 Ohma u svakoga, da se dobije najveća jakost struje I, ako je izvanji otpor w_2 Ohma?
a) $n = 24$, $w_1 = 0{\cdot}25$ Ohma, $w_2 = 1{\cdot}5$ Ohma;
b) $n = 36$, $w_1 = 1{\cdot}2$ Ohma, $w_2 = 0{\cdot}3$ Ohma.

32) U kojoj daljini izvodi neka količina elektricitete tako jako odbijanje, kao m puta tolika količina u daljini d?
a) $m = 4$, $d = 6\ cm$; b) $m = 9$, $d = 12\ cm$

III. *Različne primjene.*

33) Ako se broj a uveća za neki broj i umanji za isti broj, bit će produkt obaju novih brojeva jednak p. Koji je taj broj?
a) $a = 15$, $p = 216$; b) $a = 29$, $p = 792$;
c) $a = 6\frac{1}{2}$, $p = 40$; d) $a = 8{\cdot}3$, $p = 61{\cdot}6$.

34) Ako se broj a uveća za neki broj i onda umanji za isti broj, bit će suma kvadrata obaju novih brojeva jednaka s. Koji je taj broj?
a) $a = 13$, $s = 346$; b) $a = 17$, $s = 628$;
c) $a = 7\frac{2}{3}$, $s = 128\frac{4}{9}$; d) $a = 19{\cdot}7$, $s = 779{\cdot}56$.

35) Ako se neki broj uveća za svoju recipročnu vrijednost, izlazi m-terostruko toga broja? Koji je taj broj?
a) $m = 2$; b) $m = 10$; c) $m = 3\frac{1}{4}$; d) $m = 2{\cdot}69$.

36) Neka se odredi broj, kojega je kvadrat za 32 veći od kvadrata njegove trećine.

37) Okruglo željezo (štap s okruglim prorezom) je po tekućem metru za $1.0193\ kg$ lakše od kvadratnoga željeza (štapa s kvadratičnim prorezom) iste jakosti*. Gustoća je željeza 7·6. Neka se izračuna jakost. ($\pi = 3{\cdot}1416$).

38) Dva putnika krenu u isto doba iz istoga mjesta, jedan na istok, drugi na sjever. Prvi prevali na dan $4\frac{1}{2}$ milje, a drugi na dan 6 milja. Nakon koliko će dana biti jedan od drugoga daleko 30 milja?

C. Mješovite kvadratične jednadžbe.

Geometrički primjeri

α) Planimetrija

39) Kateta je pravokutnoga trokuta 15 *cm*, hipotenuza je za 1 *cm* duža od dvostrukoga druge katete. Kolika je ta kateta?

* „Jakost" je ovdje premjer kružnoga presjeka i stranica kvadratičnoga prereza.

40) Jedna je stranica trokuta $9\sqrt{7}\ cm$ duga, suprotni kut ima 120°; jedan je krak toga kuta dug $18\ cm$; kolik je drugi krak?

41) Jedna je kateta pravokutnoga trokuta $15\ cm$ duga, projekcija druge katete na hipotenuzu $16\ cm$; kolika je hipotenuza?

42) Dvije su stranice trokuta 24 i 10 *cm*, treća je za 13 *cm* veća od transversale povučene k njezinoj sredini. Kolika je treća stranica?

43) Pravac usporedan osnovki trokuta dijeli druge dvije stranice tako, da je donji dio jedne od obiju stranica $7\ cm$. Druga je stranica duga $24\ cm$, prva je stranica $13\ cm$ duža od donjega komada druge; kolika je prva stranica?

44) Iz točke izvan kruga povučena je na krug tangenta i sekanta. Dužina je tangente b, izvanji odsječak sekante je za n veći od tetive. Kolika je tetiva?
a) $b = 8\ cm$, $n = 5\ cm$; b) $b = 14\ cm$, $n = 2\ cm$;
c) $b = 12\ cm$, $n = 4\ cm$; d) $b = 10\ cm$, $n = 6\ cm$.

45) Koliko se milja treba dignuti s balonom, da se vidi a milja daleko? Premjer zemlje = 1719 milja.
a) $a = 10$; b) $a = 50$; c) $a = 60$; d) $a = 100$.

46) Opseg istokračnoga pravokutnoga trokuta je o. Kolik mu je krak?
a) $o = 20\ cm$; b) $o = 30\ cm$.

47) Veći odsječak dužine razdijeljene po znatnom rezu je a. Kolika je ta dužina?
a) $a = 6\ cm$; b) $a = 7\ cm$; c) $a = 16\ cm$; d) $a = 4{\cdot}4\ cm$.

48) Kut na vrhu istokračnoga trokuta ima 36°, osnovka je a. Kolike su obje dužine, na koje će pravac, koji polovi kut na osnovki, razdijeliti krak nasusret?
a) $a = 2\ cm$; b) $a = 8\ cm$; c) $a = 30\ cm$; d) $a = 8{\cdot}4\ cm$.

49) Ako se polumjer kruga uveća za $3\ cm$, postaje pljoština kruga 4 puta veća. Kolik je polumjer toga kruga?

β) Stereometrija.

50) Kod pravokutnoga je paralelepipeda jedan osnovni brid a, visina mu je za b veća od drugoga brida; kolik je taj brid, ako je obujam tijela V?
a) $a = 4\ cm$, $b = 6{\cdot}5\ cm$, $V = 300\ cm^3$;
b) $a = 15\ cm$, $b = 11\ cm$, $V = 1200\ cm^3$.

51) Kod cilindra, koji je visok a, uveća se obujam za b, ako se polumjer osnovke uveća za c, a visina za d; kolik je bio prvi polumjer osnovke?

a) $a = 7\ cm$, $b = 2552\ cm^3$, $c = 2\ cm$, $d = 3{\cdot}5\ cm$;
b) $a = 12{\cdot}6\ cm$, $b = 7260\ cm^3$, $c = 2{\cdot}5\ cm$, $d = 4{\cdot}2\ cm$.

52) Obujam stošca postaje n puta tako velik, ako mu se polumjer osnovke uveća za a; kolik je bio polumjer?
a) $n = 25$, $a = 8\ cm$; b) $n = 64$, $a = 21\ cm$.

53) Uveća li se polumjer kugle za a, uveća joj se obujam za b; kolika je bila prije dužina polumjera? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)
a) $a = 10{\cdot}5\ cm$, $b = 92169\ cm^3$;
b) $a = 21\ cm$, $b = 126126\ cm^3$.

54) Kolik je premjer valjka, kojemu je dužina d i oplošje O? ($\pi = 3{\cdot}14$.)
a) $d = 12\ cm$, $O = 175{\cdot}84\ cm^2$;
b) $d = 9\ cm$, $O = 226{\cdot}08\ cm^2$;
c) $d = 0{\cdot}8\ m$, $O = 1{\cdot}256\ m^2$;
d) $d = 19\frac{1}{3}\ cm$, $O = 219\frac{4}{5}\ cm^2$.

55) Oplošje upravnoga krnjega stošca je O, stranica mu je s, a polumjer donje osnovke R. Kolik je polumjer gornjega kruga?
a) $O = 458{\cdot}44\ cm^2$, $s = 20\ cm$, $R = 5\ cm$;
b) $O = 3479{\cdot}12\ cm^2$, $s = 45\ cm$, $R = 12\ cm$.

56) Krnja piramida s kvadratičnom osnovkom ima visinu h i obujam V. Stranica je donje osnovke a. Kolika je stranica gornje osnovke?
a) $h = 27\ cm$, $V = 333\ cm^3$, $a = 4\ cm$;
b) $h = 54\ cm$, $V = 2718\ cm^3$, $a = 9\ cm$;
c) $h = 25{\cdot}2\ cm$, $V = 292{\cdot}656\ cm^3$, $a = 3{\cdot}8\ cm$;
d) $h = 60\ cm$, $V = 3241\frac{1}{4}\ cm^3$, $a = 10\frac{1}{4}\ cm$.

57) Visina je krnjega stošca h, polumjer donje osnovke R, a obujam je V. Kolik je polumjer gornjega kruga?
a) $h = 9\ cm$, $R = 4\ cm$, $V = 197{\cdot}82\ cm^3$;
b) $h = 21\ cm$, $R = 3cm$, $V = 417{\cdot}62\ cm^3$.

58) Ako se brid kocke uveća za a, naraste obujam za v. Kolik je brid kocke?
a) $a = 2\ cm$, $v = 98\ cm^3$; b) $a = 1\ cm$, $v = 91\ cm^3$;
c) $a = 1{\cdot}4\ cm$, $v = 46{\cdot}424\ cm^3$;
d) $a = 5{\cdot}6\ cm$, $v = 914{\cdot}816\ cm^3$.

59) Kolik je brid šuplje kocke, koja ima debljinu d i težinu p? (Specifična težina tvari $= s$).
a) $d = 1\ cm$, $p = 189{\cdot}7\ g$, $s = 0{\cdot}7$ (hrastovina);
b) $d = 2\ cm$, $p = 1107{\cdot}4\ g$, $s = 11{\cdot}3$ (olovo);

c) $d = 0{\cdot}4\ cm$, $p = 158{\cdot}88\ g$, $s = 7{\cdot}5$ (željezo);
d) $d = 0{\cdot}6\ cm$, $p = 35{\cdot}748\ g$, $s = 0{\cdot}5$ (jelovina).

60) Dvije kugle imaju skupa oplošje O; suma je njihovih polumjera a. Kolik je polumjer svake kugle? ($\pi = 3{\cdot}14$).
a) $O = 5338\ cm^2$, $a = 25\ cm$;
b) $O = 1456{\cdot}96\ cm^2$, $a = 14\ cm$.

61) Kolik je unutrašnji premjer šuplje kugle, koja uz debljinu d ima težinu p? (Specifična težina tvari $= s$).
a) $d = 1\ cm$, $p = 900\ g$, $s = 8{\cdot}8$;
b) $d = 1{\cdot}5\ cm$, $p = 750\ g$, $s = 2{\cdot}8$.

II. Primjeri iz fizike.

62) Kugla težine p_1 udaljena je d od druge kugle težine p_2; u kojoj je točki sastavnice njihovih središta privlačenje obiju kugala jednako?
a) $p_1 = 9\ kg$, $p_2 = 1369\ kg$, $d = 80\ m$;
b) $p_1 = 4\ kg$, $p_2 = 1849\ kg$, $d = 135\ m$.

63) Normalna svijeća ima daljinu d od plinske svjetiljke, kojoj je jakost n puta veća; u kojoj će daljini od normalne svijeće zastor od papira, postavljen među oba izvora svjetlosti, biti jednako rasvijetljen?
a) $d = 3\ m$, $n = 4$; b) $d = 2{\cdot}4\ m$, $n = 9$.

64) α) Svijetla je točka za a bliža sferičkomu ugnutomu zrcalu, nego njezina slika. Polumjer je zrcala r; kolika je daljina svijetle točke od zrcala?
a) $a = 255\ cm$, $r = 32\ cm$; b) $a = 323\ cm$, $r = 36\ cm$.

β) Središte je kugle, kojoj pripada sferičko ugnuto zrcalo, za a bliže zrcalu, nego svijetla točka; slika je od zrcala daleko b; kolik je polumjer?
a) $a = 24\ cm$, $b = 10\ cm$; b) $a = 6cm$, $b = 9\ cm$.

---

65) Nakon koliko će sekunda s brzinom c vertikalno u vis bačena kugla doći do visine s?
a) $c = 490\ m$, $s = 4410\ m$; b) $c = 539\ m$, $s = 2572{\cdot}5\ m$.

66) Nakon koliko će sekunda kugla ispaljena koso u vis s brzinom c i pod kutom elevacije α doći do visine s?
a) $c = 441\ m$, $\alpha = 30^0$, $s = 803{\cdot}6\ m$;
b) $c = 588\ m$, $\alpha = 30^0$, $s = 1817{\cdot}9\ m$.

67) α) Koliko je vremena trebao kamen, da pane na dno bunara, ako se čuje nakon t sekunda, da je udario na dno? (brzina zvuka $= 331{\cdot}24\ m$; $g = 9{\cdot}81\ m$).

*

a) $t = 2{\cdot}7$ sekunda; b) $t = 5{\cdot}6$ sekunda.

β) Kako je dubok rov, kod kojega se nakon t sekunda čuje, da je padajuće tijelo udarilo na dno?

a) $t = 15{\cdot}5$ sekunda; b) $t = 8{\cdot}7$ sekunda.

68) α) Svijetla je točka daleko m od svoje slike u sferičkoj leći sabirači; daljina je žarišta f; kako je daleko svijetla točka od leće?

a) $m = 18\ cm$, $f = 4\ cm$; b) $m = 27cm$, $f = 6cm$.

β) Slika je za m dalja od leće nego žarište, daljina je svijetle točke od leće d; kolika je daljina slike?

a) $m = 6\ cm$, $d = 36\ cm$; b) $m = 7\ cm$, $d = 42\ cm$.

69) Daljina između predmeta i njegove slike u leći sabirači je m, daljina je žarišta f; predmet je visok h; kako je visoka slika?

a) $m = 96\ cm$, $f = 18\ cm$, $h = 2\ cm$;

b) $m = 112\ cm$, $f = 21\ cm$, $h = 3\ cm$.

70) Kod plan-konkavne je leće daljina između svijetle točke i njezine slike m; polumjer je kugle r; kako je daleko svijetla točka od leće? (Kvocijent lomljenja $n = \frac{3}{2}$.)

a) $m = 49\ cm$, $r = 5\ cm$; b) $m = 125\ cm$, $r = 10\ cm$.

71) Kod leće rastresače je svijetla točka udaljena za m od svoje slike; daljina je žarišta f; kako je daleko svijetla točka od leće?

a) $m = 150\ cm$, $f = 36\ cm$; b) $m = 175\ cm$, $f = 42\ cm$.

72) Dva magnetička pola imaju daljinu d, drugi ima n puta toliko magnetizma kao prvi; u kojoj će točki sastavnice obaju polova biti jednako njihovo djelovanje?

a) $d = 12\ cm$, $n = 4$; b) $d = 7{\cdot}7\ cm$, $n = 49$.

73) Ako se polumjer kugle uveća za m, umanjuje se gustoća elektricitete za n-terostruko uz istu količinu elektricitete; kolik je polumjer manje kugle?

a) $m = 3\ cm$, $n = 4$; b) $m = 8\ cm$, $n = 25$.

Različne primjene.

74) Zrcalo visoko 99 cm i široko 66 cm treba metnuti u okvir, koji je svagdje jednako širok i ima pljoštinu baš jednaku pljoštini zrcala. Koliko je cm širok okvir?

75) Trgovac kupi neki broj metričkih centi robe za 216 kruna. Za istu svotu kupi on drugi put iste robe, ali dobije sada 3 cente manje, jer je međutim roba poskupila za 1 krunu po centi. Koliko je centi kupio prvi put?

76) Posuda se za vodu može napuniti iz dviju cijevi, iz prve za 2 ure ranije, nego iz druge. Obje će cijevi zajedno napuniti posudu za $1\frac{7}{8}$ sati. Za koliko će se sati napuniti posuda, ako cijevi teku napose?

77) Kvadrat nekoga broja uvećan za 13-terostruko toga broja daje 264. Koji je to broj?

78) Koji broj daje, ako mu se adira njegova recipročna vrijednost sumu $2\frac{1}{6}$?

79) U prirodnom su nizu brojeva četiri zasebične cifre, koje imaju svojstvo, da je broj s dvije cifre, sastavljen od prvih dviju, jednak produktu treće i četvrte cifre. Koje su te cifre?

80) Brojnik je razlomka za 2 veći od nazivnika. Uveća li se brojnik za 1, dočim se nazivnik umanji za 3, uveća se razlomak za $1\frac{2}{3}$. Koji je taj razlomak?

81) Na izletu nekoga društva bilo je gospode i gospođa, i to dva gospodina više nego gospođa. Trošak od 400 kruna razdijeljen je tako, da je svaki gospodin platio za 4 krune više od gospođe. Sva su gospoda platila 240 kruna, a sve gospođe 160 kruna. Koliko je osoba bilo na tom izletu?

82) Netko uloži 6000 kruna na kamate i doda tomu nakon godine dana 200 kruna. Nakon dvije godine bio mu je imutak 6825 kruna. Koliko se je postotaka računalo?

83) Pas tjera zeca, koji je pred njim 10 metara. Budući da pas za svakih 10 metara treba polovinu sekunde manje nego zec, stignu ga za 10 sekunda. Koliko je metara morao pas trčati?

84) Iz mjesta M odveze se koturaš u mjesto N, koje je $19\frac{1}{4}$ kilometara daleko i u isto doba krene pješak iz mjesta N u M. Sastali su se nakon 55 minuta. Gdje su se sastali, ako koturaš za 1 kilometar treba 6 minuta manje nego pješak?

§. 28. Simetrične (recipročne) i binomične više jednadžbe.

A. Simetrične jednadžbe trećega stupnja (§. 28. C. 1.)

1) a) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; b) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$.

2) a) $x^3 + 5\frac{1}{4}x^2 + 5\frac{1}{4}x + 1 = 0$; b) $x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1 = 0$.

3) a) $x^3 - 5\frac{1}{6}x^2 - 5\frac{1}{6}x + 1 = 0$; b) $x^3 - 2\frac{1}{3}x^2 - 2\frac{1}{3}x + 1 = 0$.

4) a) $x^3 + 3{\cdot}9x^2 + 3{\cdot}9x + 1 = 0$; b) $x^3 + 6{\cdot}2x^2 + 6{\cdot}2x + 1 = 0$.

5) a) $x^3 - 1{\cdot}05x^2 - 1{\cdot}05x + 1 = 0$; b) $x^3 - 1{\cdot}9x^2 - 1{\cdot}9x + 1 = 0$.

6) a) $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$; b) $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$.

7) a) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = 0$.

8) a) $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$; b) $12x^3 - 13x^2 - 13x + 12 = 0$.

9) a) $x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{1}{2}x - 1 = 0$; b) $x^3 + 2\frac{1}{3}x^2 - 2\frac{1}{3}x - 1 = 0$.

10) a) $4x^3+13x^2-13x-4=0$; b) $3x^3-7x^2-7x-3=0$.
11) a) $x^3+mx^2+mx+1=0$; b) $x^3-mx^2-mx+1=0$.
12) a) $x^3+mx^2-mx-1=0$; b) $x^3-mx^2+mx-1=0$.

B. Simetrične jednadžbe četvrtoga stupnja. (§. 28. C. 2.)

13) a) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$; b) $x^4-x^3+x^2-x+1=0$.
14) a) $x^4+4x^3+5x^2+4x+1=0$;
b) $x^4+7x^3+12x^2+7x+1=0$.
15) a) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$;
b) $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$.
16) a) $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$;
b) $x^4+4x^3-10x^2+4x+1=0$.
17) a) $x^4-5x^3-4x^2-5x+1=0$;
b) $x^4-6x^3-25x^2-6x+1=0$.
18) a) $6x^4+5x^3+13x^2+5x+6=0$;
b) $3x^4-7x^3+8x^2-7x+3=0$.
19) a) $x^4+2x^3+2x+1=0$; b) $3x^4-2x^3-2x+3=0$.
20) a) $x^4-5x^3-5x+1=0$; b) $2x^4+3x^3+3x+2=0$.
21) a) $x^4+1\frac{1}{2}x^3-8x^2+1\frac{1}{2}x+1=0$;
b) $x^4-3\frac{1}{3}x^3+2x^2-3\frac{1}{3}x+1=0$.

C. Simetrične jednadžbe petoga stupnja. (§. 28. C. 3.)

22) $x^5+3x^4+2\frac{3}{8}x^3+2\frac{3}{4}x^2+3x+1=0$.
23) $x^5-4\frac{13}{11}x^4+4x^3+4x^2-4\frac{13}{11}x+1=0$.
24) $2x^5-3x^4-x^3-x^2-3x+2=0$.
25) $2x^5-11x^4+23x^3-23x^2+11x-2=0$.
26) $12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=0$.
27) $15x^5-49x^4+34x^3+34x^2-49x+15=0$.
28) $36x^5+180x^4-265x^3-265x^2+180x+36=0$.
29) $6x^5-41x^4+97x^3-97x^2+41x-6=0$.

D. Binomične jednadžbe. (§. 28. D.)

30) a) $x^3+1=0$; b) $5x^3+5=0$.
31) a) $x^3-1=0$; b) $3x^3-3=0$.
32) a) $x^4+1=0$; b) $7x^4+7=0$.
33) a) $x^4=16$; b) $81x^4-256=0$; c) $\frac{625}{x^4}=1296$.
34) a) $x^4-a^4=0$; b) $\frac{x^4}{(a+b)^4}=1$;
c) $x^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.

E. Jednadžbe oblika $ax^{2n}\pm bx^n+c=0$.

Bilješka. Ako se u jednadžbi $ax^{2n}\pm bx^n+c=0$ za x^n umetne y, dakle y^2 za x^{2n}, izlazi mješovita kvadratična jednadžba $ay^2\pm by+c=0$. Ako su korijeni te jednadžbe $y_1=\alpha$ i $y_2=\beta$, izlaze jednadžbe:

$$x_1^n=\alpha \text{ i } x_2^n=\beta;\ \text{dakle je } x_1=\sqrt[n]{\alpha} \text{ i } x_2=\sqrt[n]{\beta}.$$

35) a) $x^4-10x^2+9=0$; b) $x^4-26x^2+25=0$.
36) a) $x^4-34x^2+225=0$; b) $x^4-40x^2+144=0$.
37) a) $4x^4-5x^2+1=0$; b) $9x^4-10x^2+1=0$.
38) a) $x^6-9x^3+8=0$; b) $x^6-26x^3=27$.
39) a) $8x^6-9x^3+1=0$; b) $27x^6+26x^3=1$.
40) a) $x+4\sqrt{x}+3=0$; b) $x+5\sqrt{x}+6=0$.

Bilješka. Supstituiraj: $\sqrt{x}=y$, dakle $x=y^2$.

41) a) $x+3\sqrt{x}=4$; b) $x-\sqrt{x}=12$.
42) a) $2x+3\sqrt{x}+1=0$; b) $6x-\sqrt{x}=1$.
43) a) $x-0{\cdot}7\sqrt{x}=0{\cdot}3$; b) $x+1{\cdot}5\sqrt{x}=1$.

§. 29. Kvadratične jednadžbe s dvije nepoznanice.

§. 29. B. 1.

1) $\left|\begin{array}{l} x+y=9 \\ xy=20 \end{array}\right|$ **2)** $\left|\begin{array}{l} xy+3x=4 \\ 4x+7y=11 \end{array}\right|$ **3)** $\left|\begin{array}{l} x+y=-1 \\ x^2+y^2=65 \end{array}\right|$

4) $\left|\begin{array}{l} 4x^2+6y^2=4x-y \\ 3y-x=\frac{1}{2} \end{array}\right|$ **5)** $\left|\begin{array}{l} 3x+y=6x \\ \frac{4x-y}{2}+\frac{20}{x+3y}=x \end{array}\right|$

6) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2 \\ (x+y)^2+3x=31 \end{array}\right|$ **7)** $\left|\begin{array}{l} x^2-y^2+y-x=2b(2a-1) \\ x+y-2a=0 \end{array}\right|$

8) $\left|\begin{array}{l} x^2+2x-y=1 \\ 2y-x-x^2=2 \end{array}\right|$ **9)** $\left|\begin{array}{l} x(y+5)=16 \\ y(x-1)=3 \end{array}\right|$ **10)** $\left|\begin{array}{l} xy-x=4 \\ xy-y=3 \end{array}\right|$

11) $\left|\begin{array}{l} 3xy+2x^2-5x+5y=5 \\ 10(10y+5x)-11x(3y+2x)+95=0 \end{array}\right|$

12) $\left|\begin{array}{l} x^2+4xy+4y^2=x+7y+1 \\ (x+2y):(4x-y)=3:(x+2y) \end{array}\right|$

§. 29. B. 2. i 3.

13) $\left|\begin{array}{l} (x-y)^2+x-y=2 \\ 4x^2-7y^2=1 \end{array}\right|$ **14)** $\left|\begin{array}{l} 3x+6y-(x+2y)^2=-70 \\ xy+x+y=19 \end{array}\right|$

15) $\left|\begin{array}{l}\frac{3x}{y}-\frac{2y}{x}=1\\ x^2-y^2=1+xy\end{array}\right|$ **16)** $\left|\begin{array}{l}2x^2-3xy-2y^2=0\\ x^2+7x=30y+(x-2y)^2\end{array}\right|$

17) $\left|\begin{array}{l}\frac{x+1}{y+1}+\frac{x+2}{y+2}=7\\ x^2+7y^2=8xy\end{array}\right|$ **18)** $\left|\begin{array}{l}\frac{x^2+4xy-9y^2}{2x^2+3y^2+6xy}=12\\ (x+y+4)(x-2y+1)=16\end{array}\right|$

19) $\left|\begin{array}{l}4x^2+5xy=9y^2\\ (3x-2y)^2+(4x-3y)^2=x+y\end{array}\right|$

20) $\left|\begin{array}{l}4\cdot\frac{x}{y}+2\cdot\frac{y}{x}=9\\ x^2+y^2-x-y=22\end{array}\right|$ **21)** $\left|\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=13\\ x^2-xy+y^2=21\end{array}\right|$

22) $\left|\begin{array}{l}x(x+3y)=59-y^2\\ 10\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}-1\right)=-21\end{array}\right|$

§. 29. 4.

23) $\left|\begin{array}{l}x^2+y^2=25\\ xy=12\end{array}\right|$ **24)** $\left|\begin{array}{l}x^2-y^2=16\\ xy=15\end{array}\right|$ **25)** $\left|\begin{array}{l}x^2+xy=84\\ y^2+xy=112\end{array}\right|$

26) $\left|\begin{array}{l}x+y=32\\ xy=175\end{array}\right|$ **27)** $\left|\begin{array}{l}x-y=15\\ xy=76\end{array}\right|$ **28)** $\left|\begin{array}{l}x^2+y^2=962\\ xy=319\end{array}\right|$

29) $\left|\begin{array}{l}x+y=20\\ x^2+y^2=242\frac{8}{25}\end{array}\right|$ **30)** $\left|\begin{array}{l}x-y=4\frac{4}{5}\\ x^2-y^2=119\frac{1}{25}\end{array}\right|$

31) $\left|\begin{array}{l}z^2+u^2=81\frac{4}{9}\\ z-u=8\frac{1}{3}\end{array}\right|$ **32)** $\left|\begin{array}{l}x-xy+y=1\frac{5}{6}\\ 3xy=7\end{array}\right|$

33) $\left|\begin{array}{l}x\left(1+5y+\frac{y}{x}\right)=31\\ xy=5\end{array}\right|$ **34)** $\left|\begin{array}{l}x+\sqrt{xy}+y=14\\ xy=16\end{array}\right|$

35) $\left|\begin{array}{l}\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\frac{1}{2}\\ 4xy=9\end{array}\right|$ **36)** $\left|\begin{array}{l}(x+y)^2+(x-y)^2=40\\ x+3xy-y=21\end{array}\right|$

37) $\left|\begin{array}{l}(x+1)^2+(y+3)^2=117\\ x+y=11\end{array}\right|$ **38)** $\left|\begin{array}{l}(x-3)^2+(y-5)^2=53\\ x+y=17\end{array}\right|$

39) $\left|\begin{array}{l}(x+2)^2+(y+7)^2=290\\ x-y=3\end{array}\right|$ **40)** $\left|\begin{array}{l}(x+4)^2+(y-3)^2=533\\ x-y=8\end{array}\right|$

41) $\left|\begin{array}{l}x^4+y^4=82\\ x^2+y^2=10\end{array}\right|$ **42)** $\left|\begin{array}{l}x^4+y^4=257\\ x^2-y^2=15\end{array}\right|$ **43)** $\left|\begin{array}{l}x^6+y^6=793\\ x^3+y^3=35\end{array}\right|$

44) $\left|\begin{array}{l}x+y=45\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=9\end{array}\right|$ **45)** $\left|\begin{array}{l}x+y=97\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=5\end{array}\right|$ **46)** $\left|\begin{array}{l}x+y=2{\cdot}5\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=0{\cdot}4\end{array}\right|$

Odredi sam metodu, po kojoj ćeš riješiti ove sisteme jednadžbi:

47) $\left|\begin{array}{l}5x^2-3xy+5y^2-3x+5y=56\\ 5x+3y=19\end{array}\right|$

48) $\left|\begin{array}{l}5x^2-2y^2+3=0\\ (x+1):(y+1)=2:3\end{array}\right|$ **49)** $\left|\begin{array}{l}x^2-y^2-x+y+44=0\\ (2x+1):(2y-1)=3:5\end{array}\right|$

50) $\left|\begin{array}{l}(x+y)^2-(x-y)^2=36\\ 5x-2y=43\end{array}\right|$ **51)** $\left|\begin{array}{l}\sqrt{y}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+1\right)=2\frac{1}{3}\\ 9xy=4\end{array}\right|$

52) $\left|\begin{array}{l}(x+5)-(y+2)=4\\ (x+5)(y+2)=32\end{array}\right|$ **53)** $\left|\begin{array}{l}x-y=5\\ (x+5)(y+8)=168\end{array}\right|$

54) $\left|\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=19\\ x^2-xy+y^2=7\end{array}\right|$ **55)** $\left|\begin{array}{l}5x^2+7xy+5y^2=209\\ 2x^2-3xy+2y^2=14\end{array}\right|$

56) $\left|\begin{array}{l}x+y=28\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4\end{array}\right|$ **57)** $\left|\begin{array}{l}x-y=117\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\end{array}\right|$

58) $\left|\begin{array}{l}2x^2-5xy+2y^2=0\\ 3x^2+7y^2=76\end{array}\right|$ **59)** $\left|\begin{array}{l}3x^2-10xy+3y^2=0\\ 2x^2-5y^2=13\end{array}\right|$

60) $\left|\begin{array}{l}12x^2-25xy+12y^2=0\\ 3x^2-7xy+5y^2=9\end{array}\right|$ **61)** $\left|\begin{array}{l}x^2+y^2=7xy-5\\ 2x^2+2y^2=xy+3\end{array}\right|$

62) $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{36}\end{array}\right|$ **63)** $\left|\begin{array}{l}(x-16)^2+(y-8)^2=64\\ x-y=28\end{array}\right|$

64) $\left|\begin{array}{l}\frac{x+2}{y-2}+\frac{y+2}{x-2}=\frac{11}{2}\\ \frac{x+2}{y+2}+\frac{y-2}{x-2}=\frac{11}{6}\end{array}\right|$ **65)** $\left|\begin{array}{l}9x^2-y^2+3x-y=0\\ (x+2)(y-5)+3=0\end{array}\right|$

66) $\left|\begin{array}{l}2x^2+xy-y^2=11\\ 2x^2-2y^2+3xy=16\end{array}\right|$ **67)** $\left|\begin{array}{l}x^2+y\sqrt{xy}=105\\ y^2+x\sqrt{xy}=70\end{array}\right|$

68) $\left|\begin{array}{r} x^2+y+\sqrt{x^2+y}=30 \\ x^4-x^2=175 \end{array}\right|$ **69)** $\left|\begin{array}{l} (x\sqrt{x}+y\sqrt{y})\sqrt{x}=162 \\ (x\sqrt{x}+y\sqrt{y})\sqrt{y}=81 \end{array}\right|$

70) $\left|\begin{array}{r} \sqrt{2x-9}+\sqrt{13-2y}=4 \\ x-y=3 \end{array}\right|$

71) $\left|\begin{array}{l} x+5y=15 \\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{4y+1}=\sqrt{4x+9y+11} \end{array}\right|$

72) $\left|\begin{array}{l} \sqrt{(x+3)y}+\sqrt{x(y+3)}=9 \\ \sqrt{x(x+3)}+\sqrt{y(y+3)}=3\sqrt{10} \end{array}\right|$

73) $\left|\begin{array}{l} (x+a)^2+(y+b)^2=2c^2 \\ (c-x)^2+(c-y)^2=a^2+b^2 \end{array}\right|$

§. 29a. Primjene kvadratičnih jednadžbi s dvije nepoznanice.

I. Geometrija.

1) Hipotenuza je pravokutnoga trokuta c, opseg o; kolike su obje katete?
a) $c=29\ cm$, $o=70\ cm$; b) $c=37\ cm$, $o=84\ cm$.

2) Pljoština je pravokutnika p, diferencija dviju susjednih stranica je d. Kolike su stranice?
a) $p=45\ cm^2$, $d=4\ cm$; b) $p=6cm^2$, $d=3\frac{1}{6}\ cm$.

3) Opseg je pravokutnoga trokuta 60 cm, pljoština mu je 120 cm^2. Kolike su stranice?

4) Opseg je rombusa o. Kolike su njegove diagonale, ako im je suma s?
a) $o=2{\cdot}12\ m$, $s=1{\cdot}46\ m$; b) $o=20{\cdot}2\ cm$, $s=13{\cdot}46\ cm$.

5) U pravokutnu trokutu dijeli raspolovnica pravoga kuta hipotenuzu c na dva dijela, koji se odnose kao $m:n$. Kolike su katete?
a) $c=11{\cdot}1\ cm$, $m:n=12:35$;
b) $c=43{\cdot}8\ cm$, $m:n=55:48$.

6) U pravokutnu je trokutu okomica s vrha pravoga kuta na hipotenuzu v. Kolika su oba odsječka hipotenuze, ako je njihova diferencija d.
a) $v=9\ cm$, $d=24\ cm$; b) $v=10\ cm$, $d=15\ cm$.

7) Dva poligona imaju skupa 18 vrhova i 58 diagonala. Koliko vrhova ima svaki?

8) Ako svaku točku jedne hrpe točaka sastaviš sa svakom točkom druge hrpe, dobit ćeš 30 sastavnica. Ako pak točke svake hrpe

među sobom sastaviš, dobit ćeš u svemu 25 sastavnica. Koliko je točaka u svakoj hrpi?

9) Od točke A izvan kruga povučena je na krug tangenta AC i sekanta AB. Tangenta je jednaka a. Diferencija između tetive DB i odsječka izvan kruga AD jednaka je d. Traži se DB i AD.
a) $a=20\ cm$, $d=92\ cm$; b) $a=28\ cm$, $d=17\ cm$.

---

10) Upravan četverouglast stup s kvadratičnom osnovkom ima oplošje O; stranica se kvadrata odnosi prama pobočnom bridu kao $m:n$. Kolika je stranica kvadrata i kolik je brid?
a) $O=1200\ cm^2$, $m:n=2:5$;
b) $O=1056\ cm^2$, $m:n=3:4$.

11) Upravan kružni valjak ima oplošje O. Diferencija od visine i premjera osnovke je d. Traži se visina i premjer. ($\pi=3{\cdot}14$.)
a) $O=80{\cdot}07\ cm^2$, $d=4\ cm$; b) $O=175{\cdot}84\ cm^2$, $d=8\ cm$.

12) Upravan kružni stožac ima oplošje O; premjer se osnovke odnosi prama stranici stošca kao $m:n$. Kolik je premjer i kolika je stranica?
a) $O=1102{\cdot}14\ cm^2$, $m:n=3:5$;
b) $O=628\ cm^2$, $m:n=2:7$.

13) Oplošje upravnoga kružnoga krnjega stošca je O; stranica je s, a polumjeri se obaju krugova odnose kao $m:n$. Koliki su ti polumjeri?
a) $O=2160{\cdot}32\ cm^2$, $s=8\ cm$, $m:n=5:2$;
b) $O=1105{\cdot}28\ cm^2$, $s=6\ cm$, $m:n=7:3$.

14) Dvije kocke imaju skupa obujam V; suma je njihovih bridova s. Koliki su ti bridovi?
a) $V=280\ cm^3$, $s=10\ cm$; b) $V=468\ cm^3$, $s=12\ cm$.

15) Kocka ima za v veći obujam i za a veći brid nego druga kocka. Koliki su bridovi obiju kocaka?
a) $v=117\ cm^3$, $a=3\ cm$; b) $v=485\ cm^3$, $a=5\ cm$.

16) Dva valjka s kvadratičnim presjecima po osovini imaju skupa obujam V; suma je njihovih visina s. Koliki su premjeri njihovih osnovaka? ($\pi=3{\cdot}14$.)
a) $V=98{\cdot}91\ cm^3$, $s=6\ cm$; b) $V=290{\cdot}45\ cm^3$, $s=10\ cm$.

17) Obujam upravnoga krnjega stošca s visinom h je V; suma je polumjera obaju krugova s. Koliki su ti polumjeri? ($\pi=3{\cdot}14$.)
a) $h=9\ cm$, $V=122{\cdot}46\ cm^3$, $s=4\ cm$;
b) $h=6\ cm$, $V=131{\cdot}88\ cm^3$, $s=5\ cm$.

18) Obujam krnje piramide s kvadratičnim osnovkama je V, visina je tijela h, a suma gornje i donje stranice kvadrata je s. Kolike su stranice obiju osnovaka?

a) $V = 930\ cm^3$, $h = 10\ cm$, $s = 18\ cm$;

b) $V = 888\ cm^3$, $h = 8\ cm$, $s = 21\ cm$.

19) Obujam je krnjega stošca, koji ima visinu h, jednak V; diferencija od pljoština obaju krugova je p. Koliki su polumjeri tih krugova? ($\pi = 3{\cdot}14$.)

a) $h = 9\ cm$, $V = 348{\cdot}54\ cm^3$, $p = 21{\cdot}98\ cm^2$;

b) $h = 10\ cm$, $V = 2637{\cdot}60\ cm^3$, $p = 339{\cdot}12\ cm^2$.

20) Oplošje upravnoga krnjega stošca je O; stranica mu je s i oblina p. Koliki su polumjeri osnovaka?

a) $O = 320{\cdot}28\ cm^2$, $s = 11\ cm$, $p = 241{\cdot}78\ cm^2$;

b) $O = 464{\cdot}72\ cm^2$, $s = 9\ cm$, $p = 282{\cdot}60\ cm^2$.

II. Fizika.

21) Kugla ispaljena pod kutom elevacije α dosegne u horizontalnoj daljini d visinu h; kolika joj je početna brzina c?

a) $\alpha = 45^0$, $d = 390\ m$, $h = 370\ m$;

b) $\alpha = 45^0$, $d = 505\ m$, $h = 500\ m$.

22) Pod kojim kutom elevacije treba ispaliti kuglu s početnom brzinom c, ako treba, da ona u horizontalnoj daljini d pogodi predmet visine h?

a) $c = 266\ m$, $d = 380\ m$, $h = 360\ m$;

b) $c = 679\ m$, $d = 485\ m$, $h = 480\ m$.

23) Kugla izbačena koso u vis dosegne u horizontalnoj daljini d visinu h; najveća visina njegove staze je H; kolik je parametar staze?

a) $d = 7350\ m$, $h = 1225\ m$, $H = 2205\ m$;

b) $d = 23520\ m$, $h = 940{\cdot}8\ m$, $H = 6125\ m$.

24) Iz dva sela A i B, koja su 27 kilometara razdaleko, pođu dva seljaka u isto doba nasusret. Oni se sastanu nakon 3 sata i razgovaraju pô ure. Poslije toga ide svaki svojim putem s istom brzinom kao prije. No budući da onaj brže ide, koji je pošao iz A, stigne on u selo B za 81 minutu prije, nego što stigne onaj, koji dolazi iz sela B u selo A. Za koliko minuta prevali svaki jedan kilometar i gdje su se sastali?

25) Dvije se točke gibaju jednoliko na kracima pravoga kuta prama vrhu, od kojega je prva točka daleko 50 metara, a druga 136·5 metara. Nakon 7 sekunda je daljina obiju točaka 85, a nakon 9 sekunda 68 metara. Kolike su brzine tih točaka?

26) Na dužini od 1732·5 met. okrene se prednji točak na kolima 165 puta više nego stražnji. Ako se opseg svakoga točka uveća za 0·75 metara, okrenut će se na istoj dužini prednji točak samo 112 puta više nego stražnji. Kolik opseg ima svaki točak?

27) Kolika je kutna brzina ω kod centralnoga gibanja s polumjerom r, ako je kod polumjera r_1 i centralne akceleracije veće za a kutna brzina za n veća?

a) $r = 10\ m$, $r_1 = 25\ m$, $a = 41{\cdot}5\ m$, $n = 0{\cdot}1\ m$;

b) $r = 5\ m$, $r_1 = 9\ m$, $a = 19{\cdot}8\ m$, $n = 0{\cdot}2\ m$.

28) S kojom se brzinom mora centralno gibati tijelo težine p kod napetosti konca e, ako tijelo težine p_1 ima kod napetosti e_1 konca kraćega za a brzinu veću (manju) za b?

a) $p = 39\ g$, $e = 40\ g$, $p_1 = 34\ g$, $e_1 = 125\ g$, $a = 11\ m$, $b = 3{\cdot}5\ m$ (veću); b) $p = 46\ g$, $e = 1{\cdot}6\ g$, $p_1 = 38\ g$, $e_1 = 0{\cdot}9\ g$, $a = 4\ m$, $b = 0{\cdot}7\ m$ (manju).

29) Elastična kugla s težinom p_1 i brzinom v_1 udari o drugu elastičnu kuglu, koja se giba istim smjerom. Poslije sraza ima prva kugla brzinu c_1, druga brzinu c_2 (obje u smjeru brzine v_1); kolika je težina p_2 druge kugle i kolika joj je bila brzina v_2 prije sraza?

a) $p_1 = 25\ kg$, $v_1 = 111\ m$, $c_1 = 63\ m$, $c_2 = 137\ m$;

b) $p_1 = 4\ kg$, $v_1 = 21\ m$, $c_1 = 15\ m$, $c_2 = 22\ m$.

30) Dvije su kugle teške 16 i 2116 kilograma. Točka u sastavnici njihovih središta i točka na produženju te sastavnice, u kojoj je privlačenje obiju kugala jednako, udaljene su jedna od druge $35\frac{1}{21}$ m; kolika je daljina obiju središta?

31) Željezna žica specifične težine 7·6, teška 3 kilograma, vodi električnu struju 6 puta bolje od žive i ima otpor od 100 Ohma. Kako je dugačka i kako je debela ta žica?

III. Različne primjene.

32) Suma je dvaju brojeva a, a suma njihovih kvadrata b. Koji su ti brojevi?

a) $a = 8$, $b = 34$; b) $a = 5{\cdot}5$, $b = 15{\cdot}53$.

33) Diferencija dvaju brojeva je d, produkt je njihov p. Koji su ti brojevi?

a) $d = 7$, $p = 18$; b) $d = 2\frac{1}{3}$, $p = 4\frac{8}{9}$.

34) Suma kvadrata dvaju brojeva je s, produkt je njihov p. Traže se oba broja.

a) $s = 65$, $p = 28$; b) $s = 86{\cdot}42$, $p = 17{\cdot}29$.

35) Diferencija kvadrata dvaju brojeva je d, njihov je omjer $m : n$. Koji su ti brojevi?

a) $d = 80$, $m : n = 3 : 2$; b) $d = 10{\cdot}08$, $m : n = 4 : 3$.

36) Suma je dvaju brojeva s; suma njihovih kuba S. Koji su ti brojevi?

a) $s = 8$, $S = 152$; b) $s = 11$, $S = 341$.

37) Produkt je dvaju brojeva p; diferencija njihovih kuba je D. Traže se brojevi.

a) $p = 24$, $D = 152$; b) $p = 36$, $D = 665$.

38) Kako se mora broj 134522 rastaviti u dva sumanda, da bude suma od kvadratnih korijena tih sumanda jednaka 500?

39) Neka se nađu dva broja, kojima ima suma istu vrijednost kao njihov produkt i diferencija njihovih kvadrata.

40) U proporciji je suma obaju unutrašnjih članova 15, a izvanjih 29; suma kvadrata svih četiriju članova je 850. Neka se sastavi ta proporcija.

41) Neki broj s tri cifre i sumom cifri 20 ima ova svojstva: Ako mu se adira 297 postaje broj, koji ima iste cifre ali obrnutim redom. Izbrišu li se jedinice nepoznatoga broja, ostane kvadrat jedinica. Koji je taj broj?

42) Ako se nekomu razlomku uveća brojnik za kvadratni korijen brojnika, a nazivnik za kvadratni korijen nazivnika, postane razlomak, koji je $1\frac{1}{8}$ puta tako velik kao prvi razlomak. Ako se pako umanje brojnik i nazivnik istim načinom, postane razlomak, koji je tek $\frac{3}{4}$ prvoga. Koji je taj razlomak?

43) Tri su broja u postojanoj proporciji: suma je njihova 39, a produkt je njihov 729 Koji su ti brojevi?

44) Višegodišnje kamate kapitala uloženoga po 8 procenata daju skupa s kapitalom 2574 kruna. Kamate drugoga za 975 kruna manjega kapitala daju, ako je $12\frac{1}{2}$ godina duže uložen po 8 procenata od prvoga, također skupa s kapitalom 2574 kruna. Kolik je prvi kapital i kako je dugo bio uložen?

45) Na osobnom vlaku željeznice uzelo je za put od A do B karte drugoga razreda 64 osoba više, nego prvoga razreda, a u trećem razredu 166 osoba više, nego u drugom. Za sve je karte ušlo

669 kruna 60 fil., i to za drugi razred 163 kruna 20 fil. više, nego za prvi, a 40 kruna 80 fil. manje, nego za treći razred. Karta prvoga razreda stoji toliko, koliko karta drugoga i trećega razreda skupa. Koliko se prema tomu vozilo osoba u svakom razredu i koliko je stajala karta svakoga razreda?

46) Gospodar hrani neki broj mladih svinja, za koje je u svemu dao 120 kruna. Dvije uhranjene svinje ostavi sebi, a druge proda po komadu za 50 kruna više, nego je on dao. Tijem je stekao najprije čist dobitak od 480 kruna i osim toga dobitak, da će u bližnjoj godini sam klati dvije svinje. Koliko je svinja kupio i po što je bio komad?

Sedmi odsječak.

Računske operacije trećega stupnja (Dio II.).

§. 30. Potencije s cijelim eksponentima.

Definicija: I. $a^p = \overset{1)}{a} . \overset{2)}{a} . \overset{3)}{a} \ldots . \overset{p)}{a}$; $a^1 = a$

II. $a^p . a^q = a^{p+q}$,

III. $a^p : a^q = a^{p-q}$, ako je $p > q$;

IV. $a^p : a^q = \frac{1}{a^{q-p}}$, ako je $p < q$.

} Zakoni distribucije za jednake baze.

V. $a^p . b^p = (a . b)^p$,

VI. $a^p : b^p = (a : b)^p$,

} Zakoni distribucije kod jednakih eksponenata;

VII. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$,

VIII. $(a^p)^q = (a^q)^p$,

} Zakoni asociacije;

IX. $a^0 = 1$.

XI. $a^{-p} = \frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$.

A. Multiplikacija kod jednakih baza.

§. 30. B. i C.

1) a) $7^3 . 7^5$; b) $10^4 . 10^6$; c) $312^{15} . 312^{51}$; d) $8^6 . 8^3$.

2) a) $9^3 . 9^5 . 9^7$; b) $14^{15} . 14^{16} . 14^{17}$; c) $123^{14} . 123^9 . 123^{26}$.

3) a) $a^4 . a^3$; b) $x^{14} . x^{26}$; c) $m^{139} . m^{861}$; d) $p^{18} . p^{19} . p^{20}$; e) $a^6 . a^2 . a^8$.

4) a) $a^p . a^q$; b) $x^m . x^n$; c) $c^d . c^e$; d) $x^m . x^n . x^r$; e) $y^a . y^b . y$.

5) a) $8^a . 8^{b+c}$; b) $m^x . m^{y-z}$; c) $a^b . a^{11-b}$.

6) a) $q^{a+b} . q^{c-d}$; b) $a^{10-x} . a^{10+x}$; c) $m^{12+y} . m^{13-y}$.

7) a) $p^{a+b} . p^d . p^c$; b) $x^{a+b} . x^{a-b} . x^{2b}$; c) $a^{x+1} . a^{x-y} . a^{y-2x}$.

8) a) $2a^3 . 5a^4$; b) $3b^5 . 8b^7$; c) $2 \cdot 8a^7 . 1 \cdot 9a^4$.

9) a) $3a^x . 4a^y$; b) $8b^m . 7b^n$; c) $1 \cdot 2a^m . 2 \cdot 1a$.

10) a) $(x^2 + x^3) . x^5$; b) $(a^9 - a^4) . a^3$; c) $(x^{11} - x^6) . x^4$.

11) a) $(x^m + x^n) . x^r$; b) $(a^x - a^y) . a^z$; c) $(x^m - x^n) . x$.

12) a) $a^{x+y} . a^{y-z} . a^{2z-y}$; b) $x^{2a-3b} . x^{4b-5c} . x^{6c-7a}$;
c) $(p+q)^{3-4a} . (p+q)^{5a-6b} . (p+q)^{6b-a-2}$.

13) a) $(a^2 + b^3 + c^4) a^5 b^6 c^7$;
b) $\left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{4}{5}y^4 + \frac{5}{6}z^5\right) . 120x^6y^7z^8$.

14) a) $(x^2 - y^3)(x^2 + y^3)$; b) $(3a^4 + 5a^6)(3a^4 - 5a^6)$.

15) a) $(x^2 + y^4)(x^4 - y^5)$; b) $(x^2 + y^3 + z^4)(x^5 - y^6)$;
c) $(a^3 + b^4 + c^5)(a^6 + b^7 + c^8)$.

16) a) $a^7 . (a^4 - a^3) - a^{10} . (a^2 + a)$;
b) $x^{12} . (x^5 - x^7) - x^8 . (x^{11} - x^9)$.

17) a) $(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$;
b) $(x^6 - y^6)(x^{12} + x^6y^6 + y^{12})$.

18) a) $(a^{2m} + a^m b^n + b^{2n})(a^m - b^n)$;
b) $(x^{2a} - x^a y^b - y^{2b})(x^{2a} + x^a y^b - y^{2b})$.

B. Divizija kod jednakih baza.

19) a) $8^{12} : 8^4$; b) $a^9 : a^3$; c) $x^m : x^n$; d) $\frac{y^a}{y^b}$; e) $\frac{z^m}{z}$.

20) a) $\frac{15a^7}{3a^5}$; b) $\frac{3 \cdot 2a^6}{2 \cdot 4a^3}$; c) $\frac{2 \cdot 8a^m}{5 \cdot 6a^n}$; d) $\frac{a^5 . b^7}{a^2 . b^3}$; e) $\frac{a^x . b^y}{a . b}$.

21) a) $\frac{a^{m+n}}{a^{m-n}}$; b) $\frac{(x+y)^{3a+4b}}{(x+y)^{3a-4b}}$; c) $\frac{20x^{21}y^{22}z^{23}}{19x^{20}y^{21}z^{22}}$.

22) a) $\frac{a^7}{b^8} \cdot \frac{b^9}{a^6}$; b) $\frac{3x^3}{4y^4} \cdot \frac{5y^5}{6x^2}$; c) $\frac{(x+y)^7}{(y-z)^8} \cdot \frac{(y-z)^9}{(x+y)^6}$.

23) a) $\frac{x^{10}}{y^{11}} : \frac{x^9}{y^{12}}$; b) $\frac{13a^{13}}{14b^{14}} : \frac{12a^{12}}{15b^{15}}$; c) $\frac{(b+c)^{15}}{(c-d)^{14}} : \frac{(b+c)^{13}}{(c-d)^{16}}$.

24) a) $(15a^5 + 25a^6) : 5a^4$; b) $(21x^7 + 28x^5) : 7x^3$;
c) $(20a^{13} - 16a^8) : 4a^5$.

25) a) $(12a^8 + 25a^7 + 12a^6) : (3a^4 + 4a^3)$;
b) $(x^5 + x^3y^3 + x^2y^2 + y^5) : (x^3 + y^2)$.

26) a) $(a^{14} + 2a^{12} - 80a^{10}) : (a^7 - 8a^5)$;
b) $(15x^8 + 2x^9 - 24x^{10}) : (3x^3 + 4x^4)$.

27) a) $(a^2b^5 + b^8 + b^5c^4 - a^2c^6 - b^3c^6 - c^{10}) : (b^5 - c^5)$;
b) $(18x^9 - 24x^6y^4 + 30x^6z^5 - 21x^3z^7 + 28y^4z^7 - 35z^{12}) :$
$: (6x^6 - 7z^7)$;
c) $(m^8 - 2 \cdot 05m^4n^5 + 1 \cdot 5m^4p^6 + n^{10} - 1 \cdot 2n^5p^6) : (2 \cdot 5m^4 - 2n^5)$.

28) a) $(a^{12} + a^6b^6 + b^{12}) : (a^6 + a^3b^3 + b^6)$;
b) $(x^{4a} + 2x^{2a} + 9) : (x^{2a} + 2x^a + 3)$; c) $(x^{2a} - y^{2b}) : (x^a - y^b)$.

29) a) $(a^6 - b^8 + 2b^4c^5 - c^{10}) : (a^3 - b^4 + c^5)$;
b) $(4x^4 - 9y^6 + 24y^3z^4 - 16z^8) : (2x^2 + 3y^3 - 4z^4)$;
c) $(0 \cdot 25b^2 - \frac{4}{9}c^4 + c^2d^3 - 0 \cdot 5625d^6) : (\frac{1}{2}b - \frac{2}{3}c^2 + \frac{3}{4}d^3)$.

C. Multiplikacija kod jednakih eksponenata.

30) a) $5^2 . 3^2$; b) $4^3 . 2^3$; c) $(\frac{3}{4})^4 . 8^4$; d) $2^{12} . 5^{12}$; e) $4^6 . 25^6$; f) $8^4 . 125^4$.

31) a) $3^3 . 4^3 . 5^3$; b) $3^2 . 4^2 . 10^2$; c) $(\frac{2}{3})^4 . (\frac{3}{4})^4 . 6^4$.

32) a) $(2\frac{2}{3})^6 . (3\frac{3}{4})^6$; b) $(5\frac{1}{3})^3 . (18\frac{3}{4})^3$; c) $(2\frac{2}{7})^2 . (437\frac{1}{2})^2$.

33) a) $(xy)^3 . \left(\frac{x}{y}\right)^3$; b) $(9a^2b^3)^4 . \left(\frac{a^2}{9b^3}\right)^4$; c) $[(x+y)z]^5 . \left(\frac{x+y}{z}\right)^5$.

34) a) $(4x)^7 . (\frac{3}{4}y)^7 . (\frac{1}{3}z)^7$; b) $12a^2 . (\frac{2}{3}b)^2 . (\frac{5}{8}c)^2$.

35) a) $\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^4$; b) $\left(\frac{3a^3}{4b^4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4b^4}{5c^5}\right)^5$; c) $\left(\frac{a}{b}\right)^5 \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^5 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^5$.

36) a) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^5 \cdot \left(\frac{cd}{b}\right)^5$; b) $\left(\frac{2a^2}{3b^3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3b^3}{4c^4}\right)^{10} \cdot \left(\frac{4c^4}{5d^5}\right)^{10}$.

D. Divizija kod jednakih eksponenata.

37) a) $\frac{10^6}{5^6}$; b) $\frac{(18a)^3}{(12a)^3}$; c) $\frac{(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2}$; d) $\frac{(x^2-y^2)^m}{(x-y)^m}$.

38) a) $\frac{(49a^2-36b^2)^x}{(7a+6b)^x}$; b) $\frac{(a^3)^m}{(a^2)^m}$; c) $\frac{[(x+y)^7]^8}{[(x+y)^6]^8}$.

39) a) $\frac{(a^2+2ab+b^2)^x}{(a+b)^x}$; b) $\frac{(5a^2+8ab-21b^2)^y}{(a+3b)^y}$.

40) a) $\frac{(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)^p}{(x^2+2xy+y^2)^p}$;

b) $\frac{(27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3)^n}{(9x^2-12xy+4y^2)^n}$.

E. Potenciranje potencije.

41) a) $(a^2)^3$; b) $(b^3)^5$; c) $(x^4)^2$; d) $(y^2)^7$; e) (x^5); f) $(a^p)^q$; g) $(a^n)^x$.

42) a) $[(a+b)^2]^5$; b) $[(x+y)^{x+y}]^{x+y}$.

43) a) $(a^2b^3)^4$; b) $(a^4b^7)^3$; c) $(x^my^n)^r$; d) $(y^az^b)^c$.

44) a) $25(2x^3y^4)^2$; b) $(a^5b^7c^9)^{11}$; c) $(7a^2b^5)^3$; d) $(2x^ny^r)^m$.

45) a) $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$; b) $\left(\frac{a^5}{b^7}\right)^6$; c) $\left(\frac{x^m}{y^n}\right)^r$; d) $\left(\frac{y^a}{z^b}\right)^c$; e) $64\left(\frac{a^4}{2b^5}\right)^6$.

46) a) $(a^6)^2 \cdot \left(\frac{b^5}{a^4}\right)^3$; b) $(25y^4)^3\left(\frac{x^3}{5y^2}\right)^6$; c) $(m^6n^8)^3\left(\frac{p^6}{m^9n^{12}}\right)^2$.

47) a) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^6 \cdot \left(\frac{y^4}{x^6}\right)^2$; b) $\left(\frac{a^3}{4b^4}\right)^5 \cdot \left(\frac{6b^6}{a^7}\right)^8$; c) $\left(\frac{x^4}{y^5}\right)^6 \cdot \left(\frac{y^7}{z^8}\right)^9 \cdot \left(\frac{z^{10}}{x^{11}}\right)^{12}$.

F. Potencije, kojima je eksponent nula ili negativan cio broj.

§. 30. D.

48) a) $\frac{8}{5^0}$; b) $\frac{x^0}{6^2}$; c) $\frac{10^5}{11^0}$; d) $a^5 . a^0$; e) $x^0 . x^4$.

49) a) 4^{-2}; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$; c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-6}$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$.

50) a) $8^4 . 2^{-7}$; b) $12^3 . 6^{-5}$; c) $25^5 . 5^{-9}$; d) $\frac{125}{8^{-2}}$; e) $\frac{3456}{10^{-4}}$.

51) a) $0{\cdot}2^{-5}$; b) $0{\cdot}04^{-3}$; c) $0{\cdot}008^{-1}$.

52) a) $a^{-5} . a^{-6}$; b) $b^{-7} . b^3$; c) $x^{-p} . x^{-q}$.

53) a) $(a^{-3})^4 . a^{11}$; b) $(b^2)^{-8} . b^{14}$; c) $(c^{-4})^{-3} . c^{-13}$.

54) a) $a^5 . a^{-13} . a^8$; b) $x^5 . x^{-7} . x^{11} . x^{-9}$; c) $p^{x-2y} . p^{3y-4x} . p^{3x-y}$.

55) a) $(a+b)^2 . (a-b)^{-6} . (a+b)^{-7} . (a-b)^4$;

b) $(x+y)^{-8} . (x-y)^{-8} . (x^2-y^2)^6$.

56) a) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^{-5}}{b^{-6}}\right)^7 \cdot \left(\frac{a^9}{b^{10}}\right)^3$; b) $\left(\frac{x^4}{y^{-6}}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{y^{-6}}\right) \cdot \left(\frac{x^0}{y^6}\right)^6$.

57) Ukloni negativne eksponente iz ovih izraza:

a) $(x:y)^{-n}$; b) $\frac{a}{b^{-4}}$; c) $\frac{13a^{-3}bc^{-1}}{5p^{-4}q^{-5}}$; d) $\left(\frac{1}{x+x^{-1}}\right)^{-1}$.

58) Kako se piše kraće: a) $4 . 10^3 + 5 . 10^2 + 6 . 10^1 + 7 . 10^0 + 8 . 10^{-1}$; b) $3 . 10^{-1} + 7 . 10^{-2} + 8 . 10^{-3}$; c) $4 . 10^{-4} + 5 . 10^{-6}$?

Upotrijebi zakone potenciranja na izraze, koji dolaze, i u resultatima ukloni negativne eksponente:

59) $b^{2p-1} : b^{-1} + c^{3q-4} : c^{-4} : c^q$. **60)** $(a:b)^{-3} . a^{-2} . b^{-1}$.

61) $(\frac{3}{4}a^{-2} . b^5 . c^{-6})(2\frac{2}{3}a^2b^{-5}c^6)$. **62)** $(a^3b^4)^{-2} : (a^{-3}b^4)^{-3}$.

63) $\left(\frac{3a^2}{4b^3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9a^{-2}b}{4c}\right)^{-4}$. **64)** $\left(\frac{p+q}{p-q}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{p^2-q^2}{p+q}\right)^2$.

65) $(4abc^{-1} + 3a^2b^{-1}c^0) : a^{-1}b^{-1}c^{-2}$.

66) $(3p^2 + 4p^{-2})(p^2 + p^{-2})$.

67) $(5a + 6 + 3a^{-1})(2a - 1 - a^{-1})$.

68) $(a^{-8q} - 1) : (a^{-2q} + 1)$.

69) a) $[(a^{-2})^{-6}]^3 + [(a^9)^{-1}]^{-4}$; b) $[(a^{-4})^3]^{-3} + [(a^{-1})^{-2}]^{18}$.

Riješi jednadžbe, što dolaze, uklonivši najprije negativne eksponente:

70) a) $x + 12x^{-1} = 7$; b) $(x+1)^{-2} = (37 - 3x)^{-1}$.

71) $1 + 25x^{-1} + (\frac{1}{10}x)^{-2} = 0$.

72) $(4 + 7x^{-1})(3 - 5x^{-1}) = 11 - 5(x^{-1})^2$.

*

G. Potencije s negativnom bazom.

73) Izračunaj ove izraze:

a) $(-10)^3+10\,.\,(-10)^2+100\,.\,(-10)^1+1000\,.\,(-10)^0$;

b) $(-1)^4+10\,.\,(-1)^3+35\,.\,(-1)^2+50\,.\,(-1)^1+24\,.\,(-1)^0$;

c) $(-1)^5+10\,.\,(-2)^4-158\,.\,(-3)^0+(-1)^1$.

74) Izračunaj:

a) $(-1)^5\,.\,(-2)^3-(-3)^4\,.\,(-4)^3$;

b) $(-1)^4\,.\,(-2)^3-(-3)^2\,.\,(-4)^1$;

c) $(-1)^1\,.\,(-2)^2+(-3)^3\,.\,(-4)^4$.

75) Izračunaj:

a) $(-x^6)^4+(-2x^8)^3+(-3x^{12})^2+(-4x^3)^8$;

b) $(-2a^3)^4+(-2a^4)^3-(-3a^6)^2+(-5a^2)^6$.

76) Izračunaj:

a) $\dfrac{(a-b)^4}{(b-a)^4}+\left(\dfrac{a-2b+3c}{2b-a-3c}\right)^5$;

b) $\left(\dfrac{x^2-2xy+y^2}{2xy-x^2-y^2}\right)^2-\left(\dfrac{5a-4b}{4b-5a}\right)^3$.

§. 31. Radiciranje.

Prva definicija.

I. $(\sqrt[n]{p})^n=p$.

Druga definicija.

II. $\sqrt[n]{p^n}=p$.

Formule distribucije:

III. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\,.\,b}$.

IV. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$.

Formule asociacije:

V. $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ i $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, gdje je $m=p\,.\,n$.

VI. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

Formule raširivanja i redukcije:

VIIa). $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[pn]{a^{mp}}$ i

VIIb). $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n:p]{a^{m:p}}$.

VIII. $\sqrt[-n]{a}=\sqrt[n]{a}$.

IX. $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ (ako p i nije multiplum od q).

X. $\sqrt[\frac{q}{p}]{a}=\sqrt[q]{a^p}$.

Neka bude $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, i onda, kada a nije n-ta potencija.

§. 31. A.

1) Što znači: a) $\sqrt[4]{81}$; b) $\sqrt[4]{a}$; c) $\sqrt[m]{a}$; d) $\sqrt[m]{a+b}$?

2) Napiši a kao produkt od pet jednakih faktora.

3) Izrazi istine, koje dolaze, tako, da bude na lijevoj strani znak korijena:

a) $3^2=9$; b) $2^3=8$; c) $12^3=1728$; d) $(\frac{4}{3})^5=\frac{1024}{243}$;

e) $(-2)^6=+64$; f) $1^3+2^3=3^2$; g) $(1+\sqrt{2})^4=17+12\sqrt{2}$.

4) Ispitaj potenciranjem, je li pravo:

a) $\sqrt[3]{216000}=60$; b) $\sqrt[4]{4}=1$; c) $\sqrt[5]{-3125}=-5$;

d) $\sqrt[1]{200}=200$; e) $\sqrt[n]{1}=1$; f) $\sqrt[20]{0}=0$.

Ujednostruči s pomoću definicija radiciranja:

5) a) $\sqrt[3]{a^3}$; b) $\sqrt[p]{x^p}$; c) $\sqrt[10]{0\cdot4^{10}}$; d) $\sqrt{100}$; e) $\sqrt[3]{125}$; f) $\sqrt[4]{81}$.

6) a) $\sqrt[3]{0\cdot064}$; b) $\sqrt[4]{0\cdot0625}$; c) $\sqrt[5]{0\cdot00032}$; d) $\sqrt[11]{-p^{11}}$;

e) $\sqrt[5]{-243}$; f) $\sqrt[3]{-0\cdot343}$.

7) a) $(\sqrt[4]{x})^4$; b) $(\sqrt[a]{b})^a$; c) $(\sqrt[9]{0\cdot09})^9$; d) $(a\sqrt{b})^2$;

e) $(2\sqrt[3]{12\cdot5})^3$; f) $(5\sqrt[4]{1\cdot6})^4$.

8) a) $(\sqrt[n]{a^pb^q}\,.\sqrt[n]{ab})^n:(a^pb^q)$; b) $(\sqrt[n]{a^3-b^3}:\sqrt[n]{a-b})^n$.

§. 31. B.

9) a) $\sqrt{x^2y^2}$; b) $\sqrt{9a^2}$; c) $\sqrt{0\cdot49p^2}$.

10) a) $\sqrt[3]{a^3b^3}$; b) $\sqrt[3]{8x^3}$; c) $\sqrt[3]{0\cdot027y^3}$.

11) a) $\sqrt[3]{40}$; b) $\sqrt[3]{5\cdot4}$; c) $\sqrt[3]{0\cdot192}$.

12) a) $\sqrt{x^3y^4}$; b) $\sqrt[3]{a^3b^4c^5}$; c) $\sqrt[4]{d^7e^6f^5g^4}$.

13) a) $\sqrt{49\cdot64}+\sqrt{100a^2b^2c^2}-\sqrt[3]{8a^3b^3c^3}$; b) $\sqrt{18}+\sqrt{28}-\sqrt{75}$.

14) $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{320}-2\sqrt[3]{1372}$.

15) $c\sqrt[5]{a^6b^7c^3} - a\sqrt[5]{ab^7c^8} + b\sqrt[5]{a^6b^2c^8}$.

Neka se izvedu multiplikacije:

16) a) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}$; b) $\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[6]{x^2}$; c) $\sqrt[8]{p^3}\cdot\sqrt[8]{p^5}$.

17) a) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{36}$; b) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[4]{5}$; c) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$.

18) a) $\sqrt[3]{x^{a+1}}\cdot\sqrt[3]{x^{1-a}}\cdot\sqrt[3]{x}$;

b) $\sqrt[4]{p^{2+a-b}}\cdot\sqrt[4]{p^{3+b-c}}\cdot\sqrt[4]{p^{4+c-d}}\cdot\sqrt[4]{p^{d-a-5}}$.

19) a) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{8}{x^2}}$; b) $\sqrt[4]{3p^2q^3}\cdot\sqrt[4]{\frac{27}{p^2q^3}}$; c) $\sqrt[3]{\frac{ac}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}$.

20) $\sqrt[x+1]{a^3bc}\cdot\sqrt[x+1]{a^7b^xc^{13-x}}\cdot\sqrt[x+1]{a^{x-9}b^0c^{2x-13}}$.

21) $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{d}}\cdot\sqrt[3]{dc}$.

22) $(3\sqrt{45} - 7\sqrt{5})(\sqrt{1\tfrac{4}{5}} + 2\sqrt{9\tfrac{4}{5}})$.

23) $2\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{2\tfrac{2}{3}} + 4\sqrt[3]{\tfrac{1}{3}} - 3\sqrt[3]{2})$.

24) $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{12}+2} + \sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.

25) a) $(3\sqrt{x}+4\sqrt{y})(9x - 12\sqrt{xy} + 16y)$;

b) $(\sqrt{3}-\sqrt{4})(3+\sqrt{12}+4)$.

Smjesti faktor pod korijen u izrazima:

26) a) $a\sqrt[x]{b}$; b) $2\sqrt{2}$; c) $7\sqrt{5}$; d) $3\tfrac{1}{2}\sqrt{8}$; e) $4\sqrt{0{\cdot}125}$; f) $6\sqrt{3\tfrac{1}{2}}$.

27) a) $\frac{a^2b^2}{c^2}\sqrt[3]{\frac{c^5}{a^5b^5}}$; b) $\frac{b^{-3}c^{-6}}{a^{-2}}\sqrt[4]{a^{-7}b^{13}c^{25}}$;

c) $\frac{ab^2c^3}{d^4}\sqrt[x]{\frac{d^{4x-4}}{a^{x-1}b^{2x-2}c^{3x-3}}}$.

---

28) a) $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^8}}$; b) $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$; c) $\sqrt[3]{\frac{x^3}{0{\cdot}008}}$.

29) a) $\sqrt{\frac{m^3}{n^5}}$; b) $\sqrt[3]{\frac{5a^3}{6b^3}}$; c) $\sqrt[4]{\frac{16x^3}{625y^3}}$.

30) a) $\sqrt[4]{\frac{a^3b^5}{c^5d^3}}$; b) $\sqrt[3]{\frac{2m^2n^4}{3o^4p^2}}$; c) $\sqrt{\frac{81abc}{100def}}$.

31) a) $\sqrt{1-(\frac{8}{17})^2}$; b) $\sqrt{1+(\frac{21}{20})^2}$; c) $\sqrt{1+(\frac{12}{35})^2}$.

32) a) $\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}}$; b) $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{8}}$; c) $\frac{\sqrt[3]{64a^2}}{\sqrt[3]{a^2b^3}}$.

33) a) $\frac{\sqrt[3]{a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4}}{\sqrt[3]{a-b}}$;

b) $\frac{\sqrt[3]{x^{12}+4x^9y^2+6x^6y^4+4x^3y^6+y^8}}{\sqrt[3]{x^3+y^2}}$.

34) a) $\sqrt[6]{a^9b^8c^6}:\sqrt[6]{a^3b^2}$; b) $\sqrt[x]{a^{3x+2}}:\sqrt[x]{a^{2x+2}}$;

c) $\sqrt[9]{\frac{a^{17}b^3c^5}{d^8e^5}}:\sqrt[9]{\frac{a^8c^5d}{b^6e^5}}$.

35) $\sqrt[7]{(a^3b^2c^5)^4(a^5b^3c)^5}:\sqrt[7]{(a^2b^3c^4)^4(a^4b^2c)^2}$.

36) a) $1:\sqrt[x]{\frac{a}{b}}$; b) $1:\sqrt[3]{0{\cdot}008}$; c) $m^2p^3q^4:\sqrt[3]{mp^2q^5}$.

37) a) $(a+5):(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{5})$; b) $(x-y):(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$.

---

38) a) $\sqrt{a^6}$; b) $\sqrt[3]{a^{15}}$; c) $\sqrt[19]{a^{133}}$; d) $\sqrt[37]{a^{703}}$.

39) a) $\sqrt[x]{a^{pqx}}$; b) $\sqrt[y]{a^{3y}}$; c) $\sqrt[x+1]{a^{3x+3}\cdot b^{5x+5}}$.

40) a) $\sqrt[x]{a^{nx+m}}$; b) $\sqrt[x]{a^{3x+2}\cdot b^{2x+4}}$.

41) a) $\sqrt[3]{a^{22}}$; b) $\sqrt[7]{a^{39}b^{15}}$; c) $\sqrt[13]{a^{108}b^{28}c^{65}}$.

Izračunaj po formuli $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$:

42) a) $\sqrt[3]{8^7}$; b) $\sqrt[3]{27^4}$; c) $\sqrt[3]{64^2}$.

43) a) $\sqrt[4]{16^7}$; b) $\sqrt[4]{81^5}$; c) $\sqrt[4]{256^3}$.

44) a) $\sqrt[3]{(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)^4}$;

45) Raširi na eksponent 72 korijene:

a) $\sqrt[3]{a^2}$; b) $\sqrt[4]{a^3}$; c) $\sqrt[6]{a^3b}$; d) $\sqrt[12]{a^3b^5 : cd}$.

46) Dovedi na jednaki eksponent korijena:

a) $\sqrt[9]{a^{12}}$, $\sqrt[6]{a^9}$, $\sqrt[8]{a^{12}}$, $\sqrt[12]{a^{16}}$; b) $\sqrt[6]{b^3}$, $\sqrt[4]{b^2}$, $\sqrt[4]{b^6}$, $\sqrt[4]{b^{10}}$;

c) $\sqrt[5]{c^{10}}$, $\sqrt[10]{c^5}$, $\sqrt[5]{c^{15}}$, $\sqrt[15]{c^5}$; d) $\sqrt[18]{p^{12}}$, $\sqrt[12]{p^{18}}$, $\sqrt[10]{p^{12}}$, $\sqrt[10]{p^{15}}$;

e) $\sqrt[3]{q^{3n}}$, $\sqrt[n]{q^{8n}}$, $\sqrt[4]{q^{4n}}$, $\sqrt[n]{q^{7n}}$; f) $\sqrt{x^{6n}}$, $\sqrt[3]{x^{6n}}$, $\sqrt[n]{x^{6n}}$, $\sqrt[2n]{x^{6n}}$.

U primjerima, koji dolaze, dovedi korijene najprije na jednake eksponente, pa onda izvedi naznačene operacije:

47) a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$; b) $\sqrt[4]{b^3}\cdot\sqrt[7]{b^2}$; c) $\sqrt[5]{2c}\cdot\sqrt[8]{3c}$.

48) a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}$; b) $\sqrt[6]{y^5}\cdot\sqrt[9]{y^2}$; c) $\sqrt[8]{4z}\cdot\sqrt[12]{5z}$.

49) a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$; b) $\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[5]{b^6}\cdot\sqrt[7]{b^8}$; c) $\sqrt[3]{c}\cdot\sqrt[4]{c}\cdot\sqrt[5]{10c}$.

50) a) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{\frac{5}{3}}}$; b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$; c) $\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt[5]{\frac{3y}{2x}}$.

51) a) $\sqrt{a}:\sqrt[3]{a}$; b) $\sqrt{b}:\sqrt[4]{b}$; c) $\sqrt{d}:\sqrt[5]{d}$.

52) a) $\sqrt[3]{x}:\sqrt{x}$; b) $\sqrt[3]{y}:\sqrt[4]{y}$; c) $\sqrt[3]{m}:\sqrt[6]{m}$.

53) a) $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}$; b) $\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{b}}$; c) $\dfrac{\sqrt[9]{d}}{\sqrt[12]{d}}$.

54) a) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt{6}}$; c) $\dfrac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt{10}}$.

55) a) $\sqrt{27}:\sqrt[3]{9}$; b) $\sqrt[3]{4}:\sqrt[4]{8}$; c) $\sqrt[3]{36}:\sqrt[4]{324}$.

Reduciraj na najmanji pozitivni eksponent korijene:

56) a) $\sqrt[12]{a^8}$; b) $\sqrt[10]{a^{15}}$; c) $\sqrt[18]{x^{24}}$.

57) a) $\sqrt[8]{x^{6n}}$; b) $\sqrt[14n]{y^{21}}$; c) $\sqrt[16m]{a^{20m}}$.

58) a) $\sqrt{a^4b^6}$; b) $\sqrt[3]{8x^6y^9z^{12}}$; c) $\sqrt{5\frac{1}{16}m^2n^{10}o^{12}}$.

59) a) $\sqrt{a^3b^{-5}a^{-1}b^7}$; b) $\sqrt[-4]{a^{-14}}$; c) $\sqrt[-15]{a^{10}}$.

---

60) a) $\sqrt{\sqrt[5]{a^5}}$; b) $\sqrt{\sqrt[7]{b^6}}$; c) $\sqrt[3]{\sqrt[10]{c^3}}$.

61) a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^8}}$; b) $\sqrt[5]{\sqrt[7]{y^{10}}}$; c) $\sqrt[6]{\sqrt[11]{z^{12}}}$.

62) a) $\sqrt{\sqrt[3]{25}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}$; c) $\sqrt{\sqrt{100000}}$.

63) a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; b) $\sqrt[4]{b\sqrt[3]{b}}$; c) $\sqrt[m]{c\sqrt[m-1]{c}}$.

64) a) $\sqrt[8]{x\sqrt[5]{x^3}}$; b) $\sqrt[7]{y\sqrt[9]{y^5}}$; c) $\sqrt[3]{z^2\sqrt[4]{z}}$.

65) a) $\sqrt[7]{a^3b\sqrt[5]{ab^7}}$; b) $\sqrt{a^3\sqrt{a^3\sqrt{a^3}}}$; c) $a^2\sqrt[4]{a^{-3}\sqrt{ab}}$.

66) Zašto nije $\sqrt{a^3+b^3}=a+b$ i što treba adirati sumi a^3+b^3 da nova suma dade za treći korijen $a+b$?

§. 31. C.

Izračunaj kubične korijene brojeva:

67) a) 50653; b) 314432; c) 4019679.

68) a) 32157432; b) 582182875; c) 5870966464.

69) a) 97·336; b) 0·097336; c) $(23\frac{5}{8}-8).1728$.

70) Da bude decimalni razlomak treća potencija, mora da je broj njegovih mjesta djeljiv na tri. Zašto?

71) Odredi najbliži manji kubični broj k brojevima:

a) 4789; b) 57828; c) 1800; d) 473722; e) 34567234; f) 5755555.

72) Odredi cio broj x tako, da bude:

a) $x^3<4000<(x+1)^3$; b) $\left(\frac{x}{10}\right)^3<4<\left(\frac{x}{10}+\frac{1}{10}\right)^3$;

c) $\left(\frac{x}{100}\right)^3<5<\left(\frac{x}{100}+\frac{1}{100}\right)^3$; d) $x^3<478934<(x+1)^2$.

73) Odredi za x razlomak tako, da bude:

a) $x^3 < 2 < (x + \frac{1}{400})^3$; b) $x^3 < 2 < (x + \frac{1}{500})^3$;

c) $x^3 < \frac{3}{4} < (x + \frac{1}{800})^3$; d) $x^3 < 3{\cdot}14 < (x + \frac{1}{200})^3$.

74) Smjesti među dvije granice, koje su kubusi dvaju razlomaka, a razlikuju se za $\frac{1}{100}$, brojeve:

a) 54; b) 27·31; c) 4257; d) $\frac{81}{128}$; e) $\frac{289}{625}$.

Odredi **kubične korijene** ovih agregata:

75) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$. **76)** $27x^3 + 9x^2 + x + \frac{1}{27}$.

77) $8a^6b^3 + 5a^3b + \frac{25}{24b} + \frac{125}{1728a^3b^3}$.

78) $\frac{x^3}{8} - \frac{x^2y}{2} + \frac{2xy^2}{3} - \frac{8y^3}{27}$.

79) $\frac{8}{27}a^3 - 1\frac{1}{15}a^2b + 1\frac{7}{25}ab^2 - \frac{64}{125}b^3$.

80) $8 + 60x + 198x^2 + 365x^3 + 396x^4 + 240x^5 + 64x^6$.

81) $a^{12} - 6a^{10} + 13{\cdot}5a^8 - 14a^6 + 6{\cdot}75a^4 - 1{\cdot}5a^2 + 0{\cdot}125$.

82) $a^3 + 3a^2b^{-1} + 3a^2c^{-1} + 3ab^{-2} + 3ac^{-2} + b^{-3}$.

83) $x^{3p} + x^{3q} + 3x^{2p+q} + 3x^{p+2q} + 12x^{2p} + 12x^{2q} + 24x^{p+q} + 48x^p + 48x^q + 64$.

84) $\frac{1}{125}x^3 - \frac{1}{50}x^2y + \frac{1}{60}xy^2 - \frac{1}{216}y^3 + \frac{3}{175}x^2z - \frac{1}{35}xyz + \frac{1}{84}y^2z + \frac{3}{245}xz^2 - \frac{1}{98}yz^2 + \frac{1}{343}z^3$.

85) Reci metodu, po kojoj se može na osnovi formule $\sqrt[pq]{a} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}$ odrediti: a) četvrti, b) šesti, c) osmi, d) deveti, e) dvanaesti korijen.

---

§. 31. D.

86) Što znači: a) $\sqrt[3]{7}$; b) $\sqrt[4]{19}$; c) $\sqrt[5]{30}$?

87) a) Smjesti $\sqrt[3]{4}$ među dvije granice, koje se razlikuju samo za $\frac{1}{100}$.

b) Zašto je $\sqrt[3]{4}$ iracionalan broj?

88) Odredi numerički točno na dvije decimale:

a) $\sqrt[3]{2}$; b) $\sqrt[3]{144}$; c) $\sqrt[3]{0{\cdot}23}$; d) $\sqrt[6]{512}$; e) $\sqrt[4]{18}$;

f) $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$; g) $\sqrt[-1]{3{\cdot}1416}$.

89) Po jednom pismu Eratostena egipatskomu kralju Ptolomeju Euergetesu (u trećem stoljeću pr. Kr.) htjeli su Deljani, na osnovi proročanstva, nekoj pošasti učiniti kraj tijem, da podvostruče kockasti oltar Apollonov i ne znajući, kako da to urade, pitali su Platona. Kolik je morao da bude brid novoga oltara, ako je brid staroga oltara imao 3 rifa (πήχεις)? (Delski problem).

Transformiraj korijene, koji dolaze, tako, da bude što lakše izračunati njihovu numeričku vrijednost:

90) a) $\sqrt[6]{2^7 . 14 . 343^2 . \frac{2}{7}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{216}}$; c) $\sqrt[7]{\sqrt[3]{128}}$;

d) $\sqrt[3]{2\frac{39}{64} + 2^2 - 2^{-2}}$; e) $\sqrt[3]{7 : 16}$; f) $\frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}}$;

g) $5\sqrt[4]{32} + 3\sqrt[4]{1250}$; h) $\sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}(\sqrt{3} + 1)$;

i) $\sqrt[5]{41 - 29\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 1)$.

---

§. 31. E.

91) Što znači:

a) $16^{\frac{3}{4}}$; b) $a^{\frac{3}{4}}$; c) $a^{0{\cdot}1}$?

92) Pretvori u korijen:

a) $a^{\frac{5}{4}}$; b) $x^{\frac{3}{2}}$; c) $p^{\frac{1}{2}}$; d) $m^{\frac{1}{3}}$; e) $b^{\frac{1}{5}}$.

93) Pretvori u korijen:

a) $(pq)^{\frac{5}{4}}$; b) $(p+q)^{\frac{1}{5}}$; c) a^{-1}; d) $b^{-2{\cdot}4}$.

94) Izračunaj:

a) $36^{1\frac{1}{2}}$; b) $49^{\frac{7}{2}}$; c) $4^{-\frac{7}{2}}$; d) $8^{-\frac{7}{3}}$; e) $9^{-0{\cdot}5}$.

95) Izračunaj:

a) $(3\frac{1}{16})^{-\frac{5}{2}}$; b) $(1\frac{24}{25})^{-\frac{3}{2}}$; c) $(5\frac{1}{16})^{-1{\cdot}25}$.

96) Izračunaj:

a) $9^{\frac{1}{2}} + 125^{\frac{2}{3}}$; b) $625^{\frac{3}{4}} . 243^{\frac{3}{5}}$; c) $4^{-\frac{1}{2}} . (\frac{1}{25})^{-\frac{3}{2}} : 27^{-\frac{4}{3}}$.

97) Izračunaj:

$\sqrt[\frac{1}{2}]{7} - \sqrt[\frac{2}{3}]{6\frac{1}{4}} + \sqrt[0{\cdot}3]{8} - \sqrt[0{\cdot}75]{27} + \sqrt[\frac{3}{4}]{64}$.

98) Izračunaj:

a) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{25}$; b) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{\frac{1}{36}}$; c) $\sqrt[-\frac{3}{4}]{\frac{8}{27}}$; d) $\sqrt[-0{\cdot}375]{8}$.

99) Pretvori u potenciju s razlomljenim eksponentom:

a) $\sqrt[4]{a^5}$; b) $\sqrt{m^3}$; c) $\sqrt[3]{c^2}$; d) $\sqrt[10]{q}$; e) $\sqrt[-3]{a}$; f) $\sqrt[\frac{2}{3}]{b}$;

g) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{\frac{a}{b}}$; h) $\sqrt[a]{a}$; k) $\sqrt[4]{(a+b)^{15}}$; l) $\sqrt[\frac{5}{2}]{\frac{2}{5}a}$.

Pretvori u jednu potenciju na osnovi zakonâ za potenciranje, prenesenih na potencije s razlomljenim eksponentima:

100) a) $p^{\frac{1}{2}}.p^{\frac{1}{4}}$; b) $p^{\frac{1}{2}}.p^{-\frac{1}{4}}$; c) $a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{6}}$; d) $a^{\frac{5}{6}}.a^{\frac{1}{12}}$.

101) a) $b^{-1}.b^{-0{\cdot}1}.b^{2\frac{1}{10}}$; b) $a^{\frac{5}{6}}.\sqrt[6]{a^7}.a^2$; c) $\sqrt[\frac{4}{3}]{a}.\sqrt[\frac{4}{5}]{a}.a^{\frac{7}{8}}$.

102) a) $a^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{4}}$; b) $b^{\frac{1}{4}}:b^{\frac{1}{2}}$; c) $m^{-\frac{1}{2}}:m^{-\frac{1}{4}}:m$.

103) a) $v^{\frac{3}{8}}.\sqrt[4]{v^3}:v^{\frac{1}{2}}$; b) $v^{0{\cdot}23}:v^{-0{\cdot}27}$; c) $\left(\sqrt[3]{x^4}:x^{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt[6]{x^5}:\sqrt[12]{x}\right)$.

104) a) $(a^8)^{\frac{1}{4}}$; b) $\left(p^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; c) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$; d) $\left(\sqrt[3]{a^4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

§. 31. F.

105) Jednadžba $x^2=25$ ima dva korijena. Koji je od njih $25^{\frac{1}{2}}$?

106) Koja jednadžba četvrtoga stupnja ima korijen $11^{\frac{3}{4}}$?

107) Odredi razlomljen broj k, koji udovoljuje nejednadžbu: $3^k<4<3^{k+\frac{1}{\omega}}$, ako je: a) $\omega=2$; b) $\omega=5$; c) $\omega=6$.

108) Iz jednadžbe $b^x=b^z$ izlazi zaključak $x=z$, ako je b broj različit od 1. Riješi na toj osnovi jednadžbe:

a) $7^{4x-\frac{1}{2}}=7^{2-x}$; b) $5^{3x+1}.25^{\frac{1}{x+1}}=(0{\cdot}2)^{x+12}$.

Na istoj osnovi riješi još jednadžbe:

109) a) $2^{x+5}=2^3$; b) $5^{12}=5^{2(x-4)}$; c) $11^{2x+3}=11^{x+4}$.

110) a) $\sqrt[4]{17^{16-x}}=\sqrt[3]{17^{x-2}}$; b) $\sqrt[x-3]{19^5}=\sqrt[x-6]{19^2}$; c) $2^x=8$;

d) $4^x=1024$; e) $2968^x=1$; f) $(0{\cdot}25)^x=4^{3x-2}$.

111) a) $10^{(x-3)(x+15)}=1$; b) $\sqrt[x]{11}=11^x$; c) $\sqrt[x-1]{5}=5^{x+2}$.

§. 32. Logaritmiranje.

Definicija: I. $b^{\log_b a}=a$, ili:

$\log_b a=n$ znači, da je $b^n=a$.

II. $\log_b(b^n)=n$;

specijalno: $\log_b b=1$; $\log_b 1=0$.

III. $\log_b(p.q)=\log_b p+\log_b q$;

IV. $\log_b(p:q)=\log_b p-\log_b q$;

V. $\log_b(p^q)=q.\log_b p$;

VI. $\log_b \sqrt[q]{p}=\frac{1}{q}.\log_b p$;

VII. $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$;

VIII. $\log_b \sqrt{p.q}=\frac{1}{2}(\log_b p+\log_b q)$.

§. 32. A.

1) Što znači:

a) $\log_6 216$; b) $\log_6 \frac{1}{216}$.

2) Napiši primjenom znaka $\log$:

a) $5^4=625$; b) $10^5=100000$; c) $(\frac{4}{9})^2=\frac{16}{81}$;

d) $(\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$; e) $4^{-1}=\frac{1}{4}$; f) $(0{\cdot}0016)^{\frac{3}{4}}=0{\cdot}008$;

g) $(0{\cdot}0016)^{-\frac{3}{4}}=125$; h) $p^{-m}=q$;

i) $\sqrt[5]{32}=2$; k) $\sqrt[13]{1}=1$; l) $\sqrt[-4]{16}=\frac{1}{2}$.

3) Napiši u obliku potencije:

a) $\log_3 81=4$; b) $\log_2 512=9$; c) $\log_{0{\cdot}7} 0{\cdot}343=3$;

d) $\log_4 2=0{\cdot}5$; e) $\log_{11} \frac{1}{1331}=-3$; f) $\log_{2{\cdot}25} \frac{8}{27}=-\frac{3}{2}$;

g) $\log_a(a^2)=2$; h) $\log_5(25^n)=2n$; i) $\log_{\frac{p}{q}}^{-1}=\frac{q}{p}$.

4) Odredi za bazu 3 logaritme ovih brojeva:

a) 9; b) 27; c) 3; d) 729; e) 1; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{27}$;

h) $\sqrt{3}$; i) $\sqrt[5]{9}$; k) $\sqrt[11]{\frac{1}{81}}$.

5) Što su za bazu 0·4 logaritmi od:

a) $\frac{4}{25}$; b) 0·064; c) 2·5; d) $39\frac{1}{16}$; e) $1:39\frac{1}{16}$?

6) Koji numerus pripada za bazu $\frac{1}{2}$ logaritmima:
a) 2; b) 8; c) -4; d) 1; e) 0?

7) Za koju je bazu pravo:
a) $log\ 64 = 8$; b) $log\ 64 = 4$; c) $log\ \frac{1}{36} = -2$;
d) $log\ \frac{2}{3} = 3\frac{3}{8}$; e) $log\ 1 = 0$?

8) Zašto ne može da bude $\overset{4}{log}\ (-16)$ realan broj?

9) Zašto imaju: a) $\overset{1}{log}\ 1$, b) $\overset{0}{log}\ 0$ neizmjerno mnogo vrijednosti?

10) Zašto je $\overset{1}{log}\ a = \infty$?

11) Nađi racionalnih brojeva, kojima su i logaritmi racionalni brojevi, ako je baza: a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) 10; d) 0·2.

12) Između kojih zasebičnih cijelih brojeva je:
a) $\overset{2}{log}\ 7$; b) $\overset{6}{log}\ 200$; c) $\overset{7}{log}\ 0{\cdot}002$?

13) Odredi, je li racionalan ili iracionalan broj:
a) $\overset{18}{log}\ 324$; b) $\overset{9}{log}\ 27$; c) $\overset{10}{log}\ 500$; d) $\overset{1{\cdot}5}{log}\ 3\frac{3}{8}$.

14) Zna se, da je $10^{10} < 11^{10} < 10^{11}$. Odredi po tom za $\overset{10}{log}\ 11$ dvije granice, koje se razlikuju među sobom za $\frac{1}{10}$.

15) Zna se, da je $7^5 = 16807$ i $2^{14} = 16384$. Smjesti po tom:
a) $\overset{7}{log}\ 2$, b) $\overset{2}{log}\ 7$ među dvije što bliže granice.

§. 32. B.

16) Rastavi:
a) $log\ pqrs$; b) $log\ \frac{ab}{3}$; c) $log\ (xy)^z$; d) $log\ \sqrt[5]{q^m}$;
e) $log\ \frac{(d+e)^6}{e-f}$; f) $log\sqrt[m]{\frac{x^2-y^2}{x^2-z^2}}$; g) $log\sqrt[p]{(a+b-c)^q}$;
h) $log\sqrt[3]{(a+b)(a-b)}$; i) $log\sqrt{a^2-b^2}$.

17) Rastavi:
a) $log\left(\frac{a}{bc}\right)^d$; b) $log\frac{\sqrt[5]{xy}}{z}$; c) $log\sqrt[m]{(ab)^n}$;
d) $log\frac{(a+b)^m}{\sqrt[n]{(c-d)}}$; e) $log\sqrt[5]{\frac{a(b^2+c^3)}{d^4-e^5}}$; f) $log\frac{\sqrt[7]{(p+q+r)^8}}{(p-q-r)^9}$.

18) Rastavi:
a) $log\sqrt[a]{\left(\frac{bc}{d}\right)^e}$; b) $log\ a\sqrt[b]{\frac{c^d}{e}}$; c) $log\frac{\sqrt[7]{a^5b^6}}{c^8}$;

d) $log\frac{\sqrt[a]{(b+c)^d}\cdot\sqrt[e]{(f-g)^h}}{i^k}$; e) $log\frac{x^y\sqrt[y]{z^2-y^3}}{x^4-z^5}$;
f) $log\frac{\sqrt[11]{(a^3+b^4-c^5)^6(d^7-e^8+f^9)^{10}}}{g-h-i}$.

19) Sastavi u jedan logaritam:
a) $log\ x - (log\ y + log\ z)$; b) $log\ a + 2\ log\ b$;
c) $\frac{log\ p + log\ q}{m}$; d) $n[log(a+b) - log(c+d)]$;
e) $\frac{log(p^2-q^2)}{4} - log\ r$; f) $\frac{m\ log\ (ab-bc+cd)}{n}$.

20) Sastavi u jedan logaritam: a) $5\ log\ x + log\ y - log\ z$;
b) $log\ a + \frac{log\ b}{m} - log\ c$; c) $\frac{log\ p}{x} + y\ log\ p$;
d) $\frac{9[log\ (x+y) - log\ (x-y)]}{z}$;
e) $3\ log\ (x^4+y^5) - \frac{log\ (y^6-z^7)}{8}$;
f) $log\ (a+b+c) + \frac{log\ (a+b-c) - log\ (a-b+c)}{m}$.

21) Sastavi u jedan logaritam: a) $3\ log\ x + \frac{1}{5}\ log\ y - 6\ log\ z$;
b) $log\ a - \frac{2\ log\ b}{3} + log\ c$; c) $\frac{6}{7}\ log\ x - \frac{8\ log\ y + 9\ log\ z}{10}$;
d) $\frac{a[log\ (b+c) + log\ (d-e) - log\ (f+g)]}{h}$;
e) $\frac{a}{b}\ log\ (x^2+y^2) + \frac{b}{a}\ log(x^2-y^2) - \frac{x}{y}\ log\ (a^2+b^2)$;
f) $3\ log\ (x+y^2-z^3) + \frac{1}{3}\ log\ (x^3-y+z^2) - log\ (x^2-y^3+z)$.

22) Izračunaj: a) $\overset{2}{log}\ 3$; b) $\overset{2}{log}\ 9$; c) $\overset{4}{log}\ 3$; d) $\overset{4}{log}\ 9$; ako znaš, da je $\overset{10}{log}\ 2 = 0{\cdot}30103$ i $\overset{10}{log}\ 3 = 0{\cdot}47712$.

---

§. 32. C.

Neka se nađu s pomoću tablica logaritmi ovih brojeva:

23) a) 11; b) 37; c) 53; d) 69; e) 76; f) 95.
24) a) 461; b) 667; c) 939; d) 609; e) 177; f) 907.
25) a) 9193; b) 4612; c) 6415; d) 5771; e) 8007; f) 2632.

26) a) 10045; b) 10203; c) 10901;
d) 10305; e) 10789; f) 10876.

27) a) 19390; b) 612900; c) 4149000;
d) 71020000; e) 875900000; f) 3215000000.

28) a) 7·654; b) 40 32; c) 876·5;
d) 1·234; e) 101·01; f) 1·0234.

29) a) 73084; b) 35781; c) 6·3089;
d) 17·755; e) 0·67801; f) 0·024385.

30) a) 234567; b) 345678; c) 456·789;
d) 5678·91; e) 0 00678912; f) 0·000789123.

Neka se nađe numerus k ovim logaritmima:

31) a) 0·63347; b) 1·80277; c) 2·94022;
d) 3·78032; e) 4·27207; f) 5·33586.

32) a) 0·10312 — 1; b) 0·33385 — 3; c) 0·52453 — 5;
d) 0·71139 — 7; e) 0·94171 — 9; f) 0·19368 — 4.

33) a) 2·22223; b) 4·44445; c) 6·66667;
d) 8·88889; e) 5·43210; f) 0·03333.

34) a) 0·11111 — 1; b) 0·33333 — 2; c) 0·55555 — 3;
d) 0·77777 — 4; e) 0·99999 — 5; f) 0·01111 — 6.

§. 33. Primjene logaritama.

§. 33. A.

Neka se izračunaju s pomoću logaritmičkih tablica ovi **produkti:**

1) a) 737.815; b) 1981.7219; c) 10587.10234;
d) 8·715.3·051; e) 0·6313.7·118; f) 0·03438.0·007956.

2) a) 3·2936.74·925; b) 0·97832.676·73.

3) a) 2578·2.0·99833.2·0479; b) 672·94.0·032806.0·87242;
c) 0·4321.0·07851.0·009127.

Neka se izračunaju s pomoću logaritmičkih tablica ovi **kvocijenti:**

4) a) $\frac{958}{809}$; b) $\frac{1804}{1297}$; c) $\frac{5408}{743·8}$; d) $\frac{3·507}{0·5102}$; e) $\frac{0·6007}{0·09007}$.

5) a) $\frac{455·72}{329·89}$; b) $\frac{32·191}{82·475}$; c) $\frac{1}{7·4183}$; d) $\frac{2·9375}{0·45239}$;
e) $\frac{7·2849}{0·83751}$; f) $\frac{0·26843}{0·032795}$.

Neka se izračunaju istim načinom ove **potencije:**

6) a) 117^4; b) $6·347^{11}$; c) $2·513^{10}$;
d) $1·0432^{25}$; e) $11·71^5$; f) $0·03745^4$.

7) a) $49·935^2$; b) $11·987^3$; c) $1·4562^5$;
d) $0·78291^2$; e) $0·81239^4$; f) $0·99164^6$;
g) $0·0093793^2$; h) $0·0081247^3$; i) $0·0087654^2$.

Neka se logaritmički izračunaju ovi **korijeni:**

8) a) $\sqrt[6]{6·191}$; b) $\sqrt[4]{6276}$; c) $\sqrt[10]{0·5545}$; d) $\sqrt{0·0010546}$.

9) a) $\sqrt[16]{62040}$; b) $\sqrt[15]{869·2}$; c) $\sqrt[18]{0·8669}$; d) $\sqrt[24]{0·010176}$.

10) a) $\sqrt{1239·8}$; b) $\sqrt[3]{798·21}$; c) $\sqrt[5]{36·937}$;
d) $\sqrt{0·74965}$; e) $\sqrt[4]{0·092833}$; f) $\sqrt[6]{0·0082409}$.

Neka se logaritmički izračunaju ovi **izrazi:**

11) a) $\frac{53450}{341.79}$; b) $\frac{4·5298.3·7432}{8·5129}$; c) $\frac{0·43705.392·53}{99·877}$;
d) $\frac{341·72.46·393}{12·904.463·77}$; e) $\frac{0·73942.5·6681}{69·237.0·099817}$; f) $\frac{1}{0·74839.85·184}$.

12) a) $(7·189.0·5237)^{10}$; b) $1·2937^2.4·7553^3$;
c) $\left(\frac{4·8537}{3·9048}\right)^5$; d) $\frac{12·908^{10}}{3·7446^3.9·4752^4}$.

13) a) $\sqrt[5]{0·003178.0·04915}$; b) $3·1742^2.\sqrt{1·6605}$;
c) $\sqrt[4]{21·734}.\sqrt[5]{0·98276}$.

14) a) $\frac{0·0723}{\sqrt[9]{45·61}}$; b) $\frac{\sqrt[5]{0·23924}}{0·98247^3}$; c) $\frac{126·42.\sqrt[6]{8·3423}}{193·94}$.

15) a) $\sqrt[10]{0·0721^5}$; b) $\sqrt[5]{123·87.2·8395^4}$;
c) $\frac{632·35}{\sqrt{0·39274.15·198^3}}$; d) $\sqrt{98.\sqrt[3]{33·4}}$;
e) $\sqrt[3]{\frac{51·273^2}{13·4.\sqrt{89·047^3}}}$.

16) a) $(4{\cdot}7185 \cdot 9{\cdot}326)^{\frac{3}{4}}$; b) $(41{\cdot}379)^{-\frac{2}{3}}$; c) $\left(\frac{4}{7}\right)^{0{\cdot}24}$;
d) $(0{\cdot}003)^{-\frac{1}{10}}$; e) $\left(\frac{11{\cdot}111}{0{\cdot}237}\right)^{-0{\cdot}9}$; f) $\sqrt[5]{-20{\cdot}001}$.

Neka se izračunaju **prekinutim** logaritmičkim računom ovi izrazi:

17) a) $1{\cdot}234 \cdot 6{\cdot}789 + 7{\cdot}891 \cdot 8{\cdot}912$; b) $\frac{6{\cdot}211}{35{\cdot}03} + \frac{585{\cdot}3}{3057} - \frac{2724}{230{\cdot}8}$;
c) $9{\cdot}454^{13} - 4{\cdot}735^{20} + 17{\cdot}11^{11}$; d) $\sqrt[5]{7{\cdot}931 + \sqrt[6]{5252}}$.

18) a) $146{\cdot}4 \cdot 0{\cdot}05809 + \sqrt[4]{1183}$; b) $1{\cdot}296^{7} - \sqrt[8]{8{\cdot}514}$.

19) a) $47{\cdot}24 \cdot 6{\cdot}032 + 5{\cdot}523^{3} - \sqrt[3]{7625000}$;
b) $\frac{0{\cdot}001101}{0{\cdot}04306} - 0{\cdot}7097^{7} + \sqrt[3]{0{\cdot}000001189}$.

20) a) $\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

§. 34. Primjene logaritmičkih računa.

A. Geometrija.

21) U pravokutnom je trokutu hipotenuza c i jedna kateta a. Izračunaj drugu katetu.
a) $c = 41{\cdot}03\ m$, $a = 30{\cdot}25\ m$;
b) $c = 80{\cdot}21\ cm$, $a = 79{\cdot}04\ cm$;
c) $c = 487{\cdot}9\ mm$, $a = 318{\cdot}5\ mm$.

22) Stranica je istostraničnoga trokuta a. Kolika mu je pljoština p?
a) $a = 3{\cdot}628\ m$; b) $a = 2{\cdot}097\ m$; c) $a = 0{\cdot}799\ m$.

23) Kolika je stranica istostraničnoga trokuta, ako mu je pljoština p?
a) $p = 1974{\cdot}30\ cm^2$; b) $p = 1237{\cdot}50\ cm^2$; c) $p = 0{\cdot}087436\ m^2$.

24) Osnovka je istokračnoga trokuta jednaka b, krak mu je s. Kolika je pljoština trokuta?
a) $b = 171{\cdot}3\ cm$, $s = 159{\cdot}3\ cm$;
b) $b = 101{\cdot}6\ cm$, $s = 149{\cdot}9\ cm$;
c) $b = 2{\cdot}749\ m$, $s = 1{\cdot}981\ m$;
d) $b = 0{\cdot}688\ m$, $s = 0{\cdot}7658\ m$.

25) Pljoština trokuta sa stranicama a, b i c je po Heronovoj formuli: $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $2s = a + b + c$. Izračunaj pljoštinu za:
a) $a = 5{\cdot}321\ m$, $b = 6{\cdot}239\ m$, $c = 4{\cdot}982\ m$;
b) $a = 2{\cdot}573\ m$, $b = 1{\cdot}862\ m$, $c = 3{\cdot}021\ m$;
c) $a = 8{\cdot}333\ m$, $b = 6{\cdot}852\ m$, $c = 7{\cdot}506\ m$;
d) $a = 0{\cdot}192\ m$, $b = 0{\cdot}171\ m$, $c = 0{\cdot}183\ m$.

26) Polumjer je kruga r. Kolika mu je pljoština? ($\pi = 3{\cdot}1416$).
a) $r = 15{\cdot}007\ m$; b) $r = 18{\cdot}706\ m$; c) $r = 31{\cdot}648\ m$.

27) Pljoština je kvadrata p. Kolika je stranica?
a) $p = 149{\cdot}38\ m^2$; b) $p = 380{\cdot}55\ m^2$; c) $p = 0{\cdot}347850\ m^2$.

28) Pljoština je kruga p. Kolik je polumjer? ($\pi = 3{\cdot}1416$).
a) $p = 441{\cdot}28\ m^2$; b) $p = 200{\cdot}89\ m^2$; c) $p = 0{\cdot}3986\ m^2$.

---

29) Kružni valjak ima visinu h i polumjer osnovke r; specifična je težina njegove tvari s. Kolika mu je težina? ($\pi = 3{\cdot}1416$).
a) $h = 9{\cdot}46\ cm$, $r = 1{\cdot}28\ cm$, $s = 0{\cdot}75$ (bukovina);
b) $h = 12{\cdot}37\ cm$, $r = 1{\cdot}94\ cm$, $s = 7{\cdot}65$ (željezo);
c) $h = 14{\cdot}38\ cm$, $r = 1{\cdot}42\ cm$, $s = 8{\cdot}36$ (mjed);
d) $h = 204{\cdot}65\ cm$, $r = 0{\cdot}014\ cm$, $s = 8{\cdot}52$ (novo srebro).

30) Polumjer je kugle r. Kolik joj je obujam? ($\pi = 3{\cdot}1416$).
a) $r = 25{\cdot}73\ cm$; b) $r = 18{\cdot}95\ cm$; c) $r = 0{\cdot}0475\ m$.

31) Težina je kocke P; specifična težina njezine tvari je s. Kolik je brid kocke?
a) $P = 231{\cdot}95\ g$, $s = 2{\cdot}74$; b) $P = 81{\cdot}296\ g$, $s = 0{\cdot}48$;
c) $P = 444{\cdot}26\ g$, $s = 21{\cdot}47$; d) $P = 10{\cdot}293\ g$, $s = 11{\cdot}35$.

32) Težina je kružnoga valjka P; visina mu je h, a specifična težina tvari je s. Kolik je polumjer osnovke?
a) $P = 10{\cdot}463\ kg$, $h = 117{\cdot}15\ cm$, $s = 8{\cdot}52$ (novo srebro);
b) $P = 15{\cdot}008\ kg$, $h = 205{\cdot}36\ cm$, $s = 7{\cdot}75$ (željezo);
c) $P = 11{\cdot}417\ kg$, $h = 498{\cdot}04\ cm$, $s = 21{\cdot}47$ (platina);
d) $P = 18{\cdot}425\ kg$, $h = 100{\cdot}13\ cm$, $s = 8{\cdot}88$ (bakar).

33) Obujam je kugle V. Kolik joj je polumjer?
a) $V = 325{\cdot}840\ cm^3$; b) $V = 289{\cdot}510\ dm^3$; c) $V = 0{\cdot}003765\ m^3$.

B. Fizika.

34) 375 cm^3 alkohola važu 298·1 g, 137·5 cm^3 žive važu 1·87 kg, 0·567 litara petroleja važu 453·6 g. Kolike su specifične težine tih tekućina?

*

35) Iz pokusâ o brzini zvuka u vodi izašlo je, da je zvuk za putove $s_1 = 7530$, $s_2 = 9550$, $s_3 = 10400$ metara trebao vremena $t_1 = 5{\cdot}25$, $t_2 = 6{\cdot}65$, $t_3 = 7{\cdot}25$ sekunda. Iz ovih podataka odredi srednju brzinu zvuka u vodi.

36) Neka se izračuna po formuli $F = \frac{mv^2}{r}$ centrifugalna sila F lokomotive, koja ima težinu P, pa se vozi po krivulji s polumjerom r s brzinom v. ($g = 9{\cdot}81\ m$).

a) $F = 40000\ kg$, $r = 535\ m$, $v = 10{\cdot}5\ m$;
b) $P = 58500\ kg$, $r = 615\ m$, $v = 14{\cdot}25\ m$;
c) $P = 41200\ kg$, $r = 422{\cdot}5\ m$, $v = 19{\cdot}75\ m$.

37) Na kolesju sastavljenom od tri kola na vretenu je ravnotežje, ako se odnosi $P : Q = r_1 r_2 r_3 : l R_2 R_3$, gdje P znači silu, Q teret, r_1, r_2 i r_3 polumjere triju vretena, a l, R_2 i R_3 polumjere triju kolesa. Neka se 1) odredi P po ovim podacima:

a) $Q = 725\ kg$, b) $Q = 1175\ kg$,
$l = 265\ mm$, $r_1 = 45{\cdot}5\ mm$; $l = 325\ mm$, $r_1 = 35{\cdot}8\ mm$
$R_2 = 375\ mm$, $r_2 = 98\ mm$; $R_2 = 285\ mm$, $r_2 = 68{\cdot}5\ mm$;
$R_3 = 485\ mm$, $r_3 = 155\ mm$; $R_3 = 395\ mm$, $r_3 = 125\ mm$.

Neka se 2) odredi Q po ovim podacima:

c) $P = 12{\cdot}75\ kg$, d) $P = 18{\cdot}5\ kg$,
$l = 295\ mm$, $r_1 = 32{\cdot}5\ mm$; $l = 275\ mm$, $r_1 = 40{\cdot}5\ mm$;
$R_2 = 305\ mm$, $r_2 = 75{\cdot}5\ mm$; $R_2 = 225\ mm$, $r_2 = 58{\cdot}5\ mm$;
$R_3 = 375\ mm$, $r_3 = 105\ mm$; $R_3 = 315\ mm$, $r_3 = 85{\cdot}5\ mm$.

38) Na tiskalu sa šarafom, kojemu je visina zavoja h, djeluje sila na ručici l. Ravnotežje će biti na tom stroju, ako se odnosi $P : Q = h : 2\pi l$. Odredi 1) P po ovim podacima:

a) $Q = 575\ kg$, $h = 8{\cdot}5\ mm$, $l = 245\ mm$;
b) $Q = 1065\ kg$, $h = 12{\cdot}5\ mm$, $l = 375\ mm$.

Odredi 2) Q po ovim podacima:

c) $P = 15{\cdot}5\ kg$, $h = 9{\cdot}75\ mm$, $l = 315\ mm$;
d) $P = 23{\cdot}25\ kg$, $h = 11{\cdot}5\ mm$, $l = 285\ mm$.

39) Na šarafu bez kraja je uvjet za ravnotežje $P : Q = hr : 2\pi l R$, gdje su P i Q sila i teret, h je visina šarafa, l ručica na njem, a r i R su polumjeri vretena i kola. Odredi 1) P za ove podatke:

a) $Q = 1875\ kg$; b) $Q = 2570\ kg$;
$h = 22{\cdot}5\ mm$; $h = 17{\cdot}5\ mm$;
$l = 385\ mm$; $l = 415\ mm$;
$r = 115\ mm$; $r = 95\ mm$;
$R = 365\ mm$; $R = 415\ mm$.

Odredi 2) Q za ove podatke:

a) $P = 8{\cdot}75\ kg$; b) $P = 13{\cdot}25\ kg$;
$h = 14{\cdot}5\ mm$; $h = 25{\cdot}5\ mm$;
$l = 325\ mm$; $l = 375\ mm$;
$r = 85\ mm$; $r = 102\ mm$;
$R = 275\ mm$; $R = 337\ mm$.

40) Za žarišnu daljinu f bikonveksne leće od crown-stakla s kvocijentom lomljenja n i polumjerima kugala $r_1 = 255\ mm$ i $r_2 = 358\ mm$ vrijedi formula: $f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1 + r_2)}$.

Neka se odredi daljina žarišta za ove zrake:

crvena (B) . . . $n = 1{\cdot}5258$, plava (F) . . . $n = 1{\cdot}5361$,
žuta (D) . . . $n = 1{\cdot}5296$, modra (G) . . . $n = 1{\cdot}5417$,
zelena (E) . . . $n = 1{\cdot}5330$, ljubičasta (H) . . . $n = 1{\cdot}5466$.

41) Za trajanje njihaja t njihala, kojemu je (reducirana) dužina l, vrijedi formula $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Odredi 1) t za ove podatke:

a) $l = 3{\cdot}585\ m$, $g = 9{\cdot}81\ m$; b) $l = 1{\cdot}075\ m$, $g = 9{\cdot}81\ m$;
c) $l = 0{\cdot}605\ m$, $g = 9{\cdot}81\ m$.

Odredi 2) l za ove podatke:

a) $t = 1^{sec}$, $g = 9{\cdot}821\ m$: b) $t = 1^{sec}$, $g = 9{\cdot}791\ m$.

Odredi 3) g (akceleraciju sile teže) po ovim podacima za:

a) Madras: b) Calcutta: c) Napulj:
$l = 1{\cdot}25\ m$, $l = 0{\cdot}855\ m$, $l = 0{\cdot}7685\ m$,
$t = 1{\cdot}123^{sec}$; $t = 0{\cdot}92787^{sec}$; $t = 0{\cdot}87967\ m$;
d) Beč: e) Petrograd: f) Spitzbergen:
$l = 2{\cdot}3575\ m$, $l = 78\ cm$, $l = 1\ m$,
$t = 1{\cdot}5402^{sec}$; $t = 0{\cdot}88548^{sec}$; $t = 1{\cdot}00206^{sec}$.

42) Brzina se zvuka u uzduhu temperature t^0 C nađe po formuli $c_t = 332{\cdot}37\sqrt{1 + 0{\cdot}003665t}$ metara. Odredi c_t, ako je: a) $t = 25^0$; b) $t = 10^0$; c) $t = -10^0$.

43) Ako su V_0 i V_t obujmovi određene količine žive kod 0^0 i t^0, vrijedi formula $V_t = V_0 . 10^{0{\cdot}000078507t}$. Odredi 1) V_t, ako je:

a) $V_0 = 35{\cdot}25\ cm^3$, $t = 18{\cdot}3^0$; b) $V_0 = 175{\cdot}55\ cm^3$, $t = 32{\cdot}4^0$;
c) $V_0 = 70{\cdot}85\ cm^3$, $t = 58{\cdot}5^0$.

Odredi 2) V_o, ako je:

a) $V_t = 98{\cdot}25\ cm^3$, $t = 25{\cdot}75^0$; b) $V_t = 109{\cdot}5\ cm^3$, $t = 48{\cdot}25^0$;

c) $V_t = 200\ cm^3$, $t = 33{\cdot}3^0$.

44) Ako se u isto doba zabilježe stanja barometra B i b na dva ne predaleka mjesta i temperature T i t može se razlika visinâ tih dvaju mjesta (u metrima) izračunati po formuli:

$$h = 18406\,(\log B - \log b)\left(1 + 0{\cdot}003665 \cdot \frac{T+t}{2}\right).$$

Izračunaj razliku visinâ za mjesta, što dolaze, po zabilježenim podacima:

a) Zagreb . . . $B = 750{\cdot}8\ mm$, $T = 21{\cdot}4^0$,
Sljeme . . . $b = 674{\cdot}5\ mm$, $t = 14{\cdot}6^0$;

b) Graz . . . . $B = 725{\cdot}8\ mm$, $T = 19{\cdot}8^0$,
Schöckel . . $b = 638{\cdot}3\ mm$, $t = 8{\cdot}6^0$;

c) Innsbruck . $B = 711{\cdot}5\ mm$, $T = 18{\cdot}8^0$,
Lanser Kopf $b = 681{\cdot}6\ mm$, $t = 12{\cdot}4^0$;

d) Salzburg . . $B = 718{\cdot}3\ mm$, $T = 17{\cdot}3^0$,
Gaisberg . . $b = 647{\cdot}4\ mm$, $t = 11{\cdot}1^0$.

45) Razlika se visinâ može izračunati i po formuli:

$$h = 15981 \cdot \frac{B-b}{T-t}\left(1 + 0{\cdot}003665 \cdot \frac{T+t}{2}\right).$$

Koje vrijednosti za h izlaze za podatke u predašnjoj zadaći?

---

§. 33. B.

Riješi **eksponencijalne jednadžbe**, koje dolaze:

A. *Bez primjene logaritama:*

46) a) $a^{x+7} = a^{10}$; b) $b^{5-x} = b^3$; c) $y^{2x+3} = y^{8-3x}$.

47) a) $m^{3(x-5)} = m^{2(x-4)}$; b) $a^0 \cdot a^{2(3x-7)} = a \cdot a^{2x-3}$.

48) a) $(a^{x-5})^{x-6} = (a^{x-8})^{x-1}$;

b) $a^7 \cdot (a^{x-1})^{5x-1} = a^{x-8} \cdot (a^{x-2})^{5x-7}$.

49) a) $\sqrt[3]{a^{17-x}} = a^{x-5}$; b) $\sqrt[4]{a^{18x-2}} = \sqrt[3]{a^{7x+4}}$.

50) a) $\sqrt[x-2]{a^{x-3}} = \sqrt[x-2]{a^3}$; b) $\sqrt[2x-5]{a^{2x-3}} = \sqrt[2x-5]{a^5}$.

51) a) $\sqrt[m]{a^{x-m}} = \sqrt[x-n]{a^{n}}$; b) $\sqrt[n]{a^{x-m}} = \sqrt[x-n]{a^{m}}$.

52) a) $\sqrt[3]{a^{5x+7}} \cdot \sqrt[4]{a^{3x+10}} = a^2\sqrt[4]{a^{5x}}$;

b) $\sqrt{a^{7-3x}} \cdot \sqrt[3]{a^{x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{5x-7}} \cdot \sqrt[5]{a^{7-2x}} = 1$.

---

53) a) $5^x = 25$; b) $3^x = 27$; c) $2^x = 1024$;

d) $2^x = 16$; e) $2^x = 64$; f) $2^{-x} = 16$;

g) $(-2)^x = 16$; h) $(-2)^x = -16$; k) $(-2)^{-x} = -16$.

54) a) $27^x = 81$; b) $27^x = -81$; c) $27^{-x} = 81$.

55) a) $10^x = 1$; b) $100^x = 1000$; c) $1000^x = 100000$.

56) a) $10^x = 0{\cdot}01$; b) $100^x = 0{\cdot}001$; c) $1000^x = 0{\cdot}01$.

57) a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$; b) $\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5} = \left(\frac{17}{13}\right)^{5x-9}$.

58) a) $(0{\cdot}25)^x = 2^{10}$; b) $4^x = 0{\cdot}125$;

c) $(0{\cdot}05)^{2x-1} = 20^{3x-8}$.

59) a) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$;

b) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{\cdot}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

B. *S primjenom logaritama.*

60) a) $a^x = b$; b) $\sqrt[x]{a} = mn$; c) $a^x \cdot b^{mx} = c$.

61) a) $a^{n-x} = nb^x$; b) $a^{mx-p} = b^{nx-q}$;

c) $a^{3x-2} \cdot b^{2x-3} = c^{4x-5}$.

62) a) $10^x = 3$; b) $100^x = 0{\cdot}005736$;

c) $1000^x = 0{\cdot}093768$.

63) a) $2^x = 10$; b) $7^x = 100$; c) $0{\cdot}025229^x = 1000$.

64) a) $3{\cdot}111^x = 1{\cdot}7497$; b) $10^x = 1{\cdot}3713^{10}$;

c) $10^{4x} = 5{\cdot}7544$.

65) a) $\sqrt[x]{9977} = 2{\cdot}511308$; b) $\sqrt[x]{8{\cdot}3946} = 1000$.

66) a) $\sqrt[x]{7692{\cdot}3} = 0{\cdot}00013$; b) $\sqrt[x]{1{\cdot}7649} = \sqrt[5]{5}$.

67) a) $21^{\frac{1}{x}} = 1{\cdot}78$; b) $10^{\frac{1}{x}} = 32{\cdot}43^{\frac{1}{49}}$.

68) a) $\sqrt[7x]{7^{5x+7}} = \sqrt[5x]{5^{7x+5}}$; b) $\sqrt[3x]{100^{2x+5}} = \sqrt[x]{4{\cdot}64159^{5x+2}}$.

69) a) $3^x - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$;

b) $5^{2x+1} - 7^{x+1} = 5^{2x} + 7^x$.

70) a) $7^{2x-1} - 3^{3x-2} = 7^{2x+1} - 3^{3x+2}$;

b) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$.

71) a) $\left|\begin{array}{c} 10^x \cdot 5^y = 71860 \\ x + 4 = y \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{c} 2^x \cdot 3^y = 15650 \\ 4^x : 3^y = 27865 \end{array}\right|$

72) a) $\left|\begin{array}{c} \sqrt[x]{x+y} = 4 \\ (x+y) \cdot 2^x = 32768 \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{c} a^x \cdot b^y = c \\ d^x \cdot e^y = f \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{c} x^y = y^x \\ b^x = a^y \end{array}\right|$.

Osmi odsječak.

Progresije. Sastavljeni kamatni račun. Račun amortizacije i renta. Verižni razlomci.

§. 35. Aritmetičke progresije prvoga reda.

I. $z = a + (n-1)\,d$,

II. $s = \frac{1}{2}n\,(a + z)$,

III. $s = na + \frac{1}{2}n\,(n-1)\,d$.

I. Primjeri.

§. 35. A. i B.

1) Kolik je z i s, ako je:
a) $a = 2$, $d = 3$, $n = 10$; b) $a = 100$, $d = -3$, $n = 28$;
c) $a = 50$, $d = -7$, $n = 30$; d) $a = 600$, $d = -18$, $n = 27$.

2) Kolik je 19. član u aritmetičkoj progresiji 17, 24, 31 . . .?

3) Kolik je 14. član u aritmetičkoj progresiji 2·3, 2·9, 3·5 . . .?

4) Neka se odredi 23. član u aritmetičkoj progresiji 21, 13. 5 . . .

5) Koji je 65. parni broj?

6) Posljednji je član u aritmetičkoj progresiji od 19 članova 130; konstantna je diferencija 7. Kolik je prvi član?

7) Prvi je član u aritmetičkoj progresiji od 18 članova 7, posljednji je član 262. Kolika je konstantna diferencija?

8) Prvi je član aritmetičke progresije od 27 članova -19, posljednji je član $+163$. Za koliko se uvećavaju članovi?

9) Koliko članova ima aritmetička progresija, koja se počinje s 3, svršava sa 171 i u kojoj se članovi uvećavaju za 4?

10) Aritmetička se progresija počinje sa $+74{\cdot}1$ i svršava s $-27{\cdot}4$. Članovi se umanjuju svagda za 3·5. Koliko je članova?

11) Koji je posljednji član aritmetičke progresije od 13 članova, kojoj je suma 1079, a počinje se s 29?

12) Suma je aritmetičke progresije od 25 članova $508\frac{1}{3}$, prvi je član $2\frac{1}{3}$. Traži se posljednji član.

13) Suma je aritmetičke progresije od 32 člana jednaka 425·6. Progresija se počinje s 0·9. Kolik je posljednji član?

14) Koliko članova ima aritmetička progresija, kojoj je prvi član $4\frac{2}{3}$, posljednji član $77\frac{1}{6}$, a suma $1227\frac{1}{2}$?

§. 35. C.

15) Kolik je a i s, ako je:
a) $d = -9$, $n = 27$, $z = 66$;
b) $d = -1{\cdot}75$, $n = 31$, $z = -40$;
c) $d = 25$, $n = 40$, $z = 1000$;
d) $d = 7$, $n = 175$, $z = 1225$?

16) Odredi a i z, ako je:
a) $d = 6$, $n = 10$, $s = 310$;
b) $d = 76\frac{1}{3}\frac{5}{7}$, $n = 37$, $s = 51108$;
c) $d = 20$, $n = 30$, $s = 9000$;
d) $d = -10$, $n = 200$, $s = 1000$.

17) Neka se odredi a i d, ako je:
a) $z = -80$, $n = 31$, $s = -852{\cdot}5$;
b) $z = 3500$, $n = 31$, $s = 85250$;
c) $z = 12300$, $n = 100$, $s = 621150$;
d) $z = 0$, $n = 101$, $s = 734775$.

18) Kolik je d i z, ako je:
a) $a = 3$, $n = 13$, $s = 351$;
b) $a = 16$, $n = 124$, $s = 62992$;
c) $a = 7225$, $n = 86$, $s = 310675$;
d) $a = 222$, $n = 223$, $s = 0$.

19) Neka se odredi d i s, ako je:
a) $a = 6$, $z = -489$, $n = 100$;
b) $a = -5780$, $z = 0$, $n = 101$;
c) $a = 642$, $z = -642$, $n = 215$;
d) $a = 13$, $z = 209$, $n = 15$.

20) Kolik je d i n, ako je:
a) $a = 4$, $z = 104$, $s = 1134$;
b) $a = 12345$, $z = 0$, $s = 5086140$;
c) $a = 3127$, $z = -3123$, $s = 102$;
d) $a = 15637$, $z = -15613$, $s = 612$.

21) Odredi a i n, ako je:
a) $d = 3$, $z = 29$, $s = 155$;
b) $d = -54{\cdot}3$, $z = 0$, $s = 274215$;
c) $d = 9$, $z = 530$, $s = -119$;
d) $d = 125$, $z = 11000$, $s = 94500$.

22) Izračunaj z i n, ako je:
a) $a = 50$, $d = -7$, $s = -1545$;
b) $a = 6420$, $d = -32{\cdot}1$, $s = 645210$;

c) $a = 556$, $d = -37$, $s = 31$;
d) $a = 42041$, $d = -576$, $s = -42055$.

Bilješka. Zadaće 21. i 22. daju mješovite kvadratične jednadžbe.

II. Aritmetičke progresije i jednadžbe.

23) U aritmetičkoj progresiji je 7. član 10, 17. član 50. Kolik je prvi član i kolika je diferencija?

24) Peti je član aritmetičke progresije 28, deveti je 52; kolik je deseti član i kolika je diferencija?

25) Deveti je član u aritmetičkoj progresiji 35, diferencija je sedmoga i dvanaestoga člana 20; kolika je suma od 13 prvih članova?

26) Suma je 4. i 7. člana aritmetičke progresije 100, suma 17. i 19. člana je 800. Koja je to progresija?

27) Suma je 3. i 4. člana aritmetičke progresije 19, diferencija je 5. i 6. člana 3; kolik je prvi član i kolika je diferencija?

28) Diferencija je drugoga i šestoga člana 7, treći član dividiran na sedmi daje 4·5; kolik je prvi član i kolika je diferencija?

29) Suma je trećega i devetoga člana 510, diferencija kvadrata jedanaestoga i prvoga člana je 45900; kolik je prvi član i kolika je diferencija?

30) U aritmetičkoj progresiji od 20 članova je produkt obaju srednjih članova 725, suma 3. i 12. člana je 30. Kolik je prvi član i kolika je diferencija te progresije?

31) Suma od kvadrata 4. i 11. člana aritmetičke progresije je 13181, suma 1. i 10. člana je 170. Kolik je prvi član i kolika je diferencija te progresije?

32) Sedmi je član aritmetičke progresije — 24, diferencija od kvadrata 5. i 3. člana je 180; kolik je prvi član i kolika je diferencija?

Bilješka. Posljednje 3 zadaće daju mješovite kvadratične jednadžbe.

III. Primjene aritmetičke progresije.

33) Netko je namješten s plaćom od 3750 kruna, koja raste na godinu za 75 kruna. Koliku plaću dobiva u 30. godini službovanja i koliko je dobio u svemu do konca te godine?

34) Činovnik ima 2000 kruna početne plaće i dobiva svake godine doplatak od 50 kruna, dok mu plaća ne naraste na 3500 kruna. Nakon koliko će godina to biti?

35) Netko ima da plati za godinu dana dug od 864 krune i isplaćuje ga u mjesečnim obrocima, koji se svaki mjesec umanjuju za 6 kruna. Kolik je 1. i kolik je 12. obrok?

36) Kolik je kapital netko za 21 godinu uštedio, ako je u prvoj godini uložio 100 kruna, a u svakoj godini dalje 5 kruna više nego u predašnjoj?

37) Kad se je kopao bunar, stajalo je kopanje zemlje do dubljine od 1 metra 3 krune, za svaki metar dalje 2 krune više, nego za predašnji; što je stajao cijeli posao, ako je bunar bio dubok 13 metara?

38) Kod gradnje tornja visokog 120 metara plaćalo se za donašanje kamena po kubičnom metru s početka 2 krune; kod svake za 1 metar više vrste 5 filira više nego kod predašnje. Što se je plaćalo na koncu po kubičnom metru?

39) Putnik treba da prevali prvi kilometar, 11 minuta, a za svaki dalji kilometar $\frac{1}{5}$ minuta više nego za predašnji. Kolik je put prevalio u svemu, kad je išao 5 sati 51 minutu?

40) Željeznički vlak (voz) prevali u prvoj sekundi 0·31 metra — nakon 3 minute ima svoju punu brzinu od 20 metara u sekundi; kolik je bio poprijeko prirastak brzine (akceleracija) u svakoj sekundi?

41) Kod jednoliko usporenoga gibanja je tijelo nakon 100 sekunda na miru; kolik je put prevalilo u prvoj sekundi, i kolik je gubitak brzine (retardacija) u svakoj sekundi, ako je tijelo u tom vremenu prevalilo 5050 metara?

42) Željeznički vlak vozi s brzinom od 10·51 metara; prije ulaza u štaciju traje usporeno gibanje njegovo $3\frac{1}{2}$ minuta uz gubitak brzine (retardaciju) od 0·05 metara u sekundi. Kolik put prevali vlak u posljednjoj sekundi, a kolik za čitavoga usporenoga gibanja?

43) Tijelo je bačeno brzinom od 7 metara vertikalno dolje, ali prevaljuje poradi pomaganja zemaljske teže u prvoj sekundi put od 11·9 metara, u posljednjoj put od 100·1 metara, a akceleracija je 9·8 metara. Koliko traje to gibanje i kolik je put tijelo prevalilo u tom vremenu?

44) Željezničke tračnice imaju na prugi dugačkoj 441 metar uspon od 10%; za koliko će sekunda stići na donji kraj pruge vagon, koji stoji na gornjem kraju pruge, ako se giba samo poradi sile teže, i kolik će biti njegov put u posljednjoj sekundi?

45) Kod ulaženja u utrobu zemlje raste temperatura na svakih 37 metara za 1°; ako je temperatura na površini zemlje 10°, kolika je 370 metara ispod nje?

46) Na površini je zemlje temperatura 15°, u dubljini od 1110 metara je 45°; kod koje diferencije visina raste temperatura poprijeko za 1°?

47) Između krakova kuta povučeno je 19 usporednih pravaca; prvi je dugačak 7 *cm*, posljednji 43 *cm*. Za koliko se centimetara razlikuju dva zasebična pravca i kolika je suma svih usporednih pravaca?

§. 35. D.

48) Umetni među 1 i 2 devet članova tako, da postane aritmetička progresija.

49) Interpoliraj među 4 i 246 u jednakim razmacima 21 član.

50) Jednoga se je ljetnoga dana termometar od 6 sati u jutro do 2 sata po podne digao od 10° do 26°. Neka se izračuna koliko je stupanja pokazivao termometar u $6\frac{1}{2}$ sati, 7 sati, $7\frac{1}{2}$ sati i t. d. do $1\frac{1}{2}$ sati, ako se uzme, da su brojevi temperatura u svakoj polovini sata za jednako rasli.

51) Kod Cuxhavena naraste Laba za plime, koja traje $5\frac{1}{4}$ sata, za 3 metra. Odredi za koliko se je metara digla Laba nakon 4 sata iza početka plime, ako se uzme, da visine, mjerene svake četvrti ure čine aritmetičku progresiju.

§. 36. Geometričke progresije.

I. $z = aq^{n-1}$;

II. $s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$;

III. $s = \frac{zq - a}{q - 1}$;

IV. $s = \frac{a}{1 - q}$ (ako je $q < 1$ i $n = \infty$).

I. Primjeri.

§. 36. A. i B.

1) Neka se izračuna z i s, ako je:
a) $a = 3$, $q = 2$, $n = 11$; b) $a = 8192$, $q = 0{\cdot}5$, $n = 14$;
c) $a = 4$, $q = -6$, $n = 9$; d) $a = 6$, $q = 2$, $n = 11$.

2) Što je 10. član u progresiji 1, 2, 4, 8, ... ?

3) Neka se izračuna 12. član u progresiji 3·9, 7·8, 15·6, ...

4) Traži se 14. član u progresiji 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...

5) Posljednji je član u geometričkoj progresiji od 7 članova 819·2, a predposljednji 204·8; neka se izračuna prvi član.

6) Što je kvocijent geometričke progresije, koja se počinje s 2, a završuje s 4374?

7) Suma geometričke progresije od 8 članova je 1530, kvocijent je 2. Kolik je prvi član?

8) Kolik je prvi član u geometričkoj progresiji od 6 članova, kojoj je suma 1638 i u kojoj je kvocijent -4?

9) Koliko članova ima geometrička progresija, koja se počinje s članovima 6 i 12, a suma joj je 12282?

10) Koliko je članova u geometričkoj progresiji, koja se počinje s 0·3, kojoj je suma 51·3, a kvocijent joj je -2?

11) Koliko članova ima geometrička progresija, koja se počinje s članovima -12 i $+48$, a suma joj je -2460?

12) Tri broja, od kojih je prvi 11, čine geometričku progresiju; suma joj je 2013. Kolik je kvocijent?

13) Tri broja, od kojih je prvi $\frac{3}{4}$, čine geometričku progresiju; suma joj je $3\frac{1}{2}$. Traži se kvocijent.

14) Kolika je suma geometričke progresije, u kojoj je prvi član 1, posljednji član 5, a kvocijent 1·1?

15) Prva su dva člana geometričke progresije 5·4 i 16·2, posljednji je član 1312·2. Kolika je suma te progresije?

16) Prvi je član geometričke progresije 7, posljednji je 896, a suma joj je 1785. Kolik je kvocijent?

17) Kojim se članom završuje geometrička progresija, koja se počinje s 3 i ima kvocijent 5, ako joj je suma 11718?

18) Kvocijent je geometričke progresije 2, posljednji je član 1536; kolik je prvi član?

§. 36. C.

19) Izračunaj z i s, ako je:

a) $a=3,\quad q=2,\quad n=11;$

b) $a=8192,\quad q=0{\cdot}5,\quad n=14;$

c) $a=4,\quad q=-6,\quad n=9;$

d) $a=6,\quad q=2,\quad n=11.$

20) Izračunaj a i z, ako je:

a) $q=4,\quad n=10,\quad s=349525;$

b) $q=5,\quad n=6,\quad s=1{\cdot}24992;$

c) $q=1{\cdot}05,\quad n=50,\quad s=2094;$

d) $q=1{\cdot}04,\quad n=100,\quad s=2475.$

21) Izračunaj q i s, ako je:

a) $a=-15,\quad z=-15360,\quad n=11;$

b) $a=1000,\quad z=1809,\quad n=25;$

c) $a=350000,\quad z=17143,\quad n=21:$

d) $a=1,\quad z=100,\quad n=17.$

22) Izračunaj n i s, ako je:

a) $a=6,\quad q=2,\quad z=6144;$

b) $a=1,\quad q=2,\quad z=2048;$

c) $a=1,\quad q=3{\cdot}981,\quad z=1000000;$

d) $a=4096,\quad q=\frac{1}{1025},\quad z=0.$

Bilješka. Zadaća daje eksponencijalne jednadžbe.

23) Izračunaj a i n, ako je:

a) $q=\frac{1}{2},\quad z=2,\quad s=32766;$

b) $q=1{\cdot}05,\quad z=11467,\quad s=220807;$

c) $q=\frac{4}{5},\quad z=0,\quad s=490;$

d) $q=4,\quad z=512000,\quad s=682625.$

24) Izračunaj n i z, ako je:

a) $a=3125,\quad q=-0{\cdot}2,\quad s=2604;$

b) $a=14,\quad q=3,\quad s=413336;$

c) $a=0{\cdot}49,\quad q=\frac{6}{7},\quad s=3{\cdot}43;$

d) $a=15625,\quad q=\frac{3}{125},\quad s=16000.$

25) Izračunaj n i q, ako je:

a) $a=14,\quad z=-2100{\cdot}875,\quad s=-1637{\cdot}125;$

b) $a=15000,\quad z=45081,\quad s=713548;$

c) $a=1{\cdot}6,\quad z=0,\quad s=2{\cdot}2;$

d) $a=3200,\quad z=25,\quad s=6375.$

Bilješka. I ova zadaća daje eksponencijalne jednadžbe.

§. 36. D.

26) Odredi sume ovih beskonačnih progresija:

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots.$ in inf.

b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots.$ in inf.

c) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\ldots.$ in inf.

d) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\frac{81}{256}+\ldots.$ in inf.

e) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots.$ in inf.

f) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-+\ldots$. in inf.

g) $1-\frac{2}{5}+\frac{4}{25}-\frac{8}{125}+-\ldots$. in inf.

h) $6-\frac{6}{7}+\frac{6}{49}-\frac{6}{343}+-\ldots$. in inf.

i) $8-4\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}+2-+\ldots$. in inf.

27) Što daje $1-x+x^2-x^3+-\ldots$. in inf. za $x<1$?

28) Prvi je član beskonačne geometričke progresije $\frac{3}{4}$, suma joj je $1\frac{1}{8}$. Koja je to progresija?

29) Suma je beskonačne geometričke progresije $\frac{1}{5}$, kvocijent je $1\frac{1}{24}$. Koja je to progresija?

30) Suma je beskonačne geometričke progresije $3\frac{1}{3}$, drugi je član $\frac{8}{15}$. Kolik je prvi član i kolik je kvocijent?

31) S pomoću formule za sumu beskonačne geometričke progresije neka se izračunaju obični razlomci, koji su jednaki ovim periodičnim decimalnim razlomcima:

a) $0\cdot\dot{8}$, b) $0\cdot\dot{2}\dot{7}$; c) $0\cdot\dot{4}3\dot{2}$; d) $0\cdot\dot{1}$; e) $0\cdot3\dot{7}\dot{8}$; f) $0\cdot\dot{2}85714\dot{2}$;
g) $0\cdot\dot{0}1369863\dot{2}$; h) $0\cdot201\dot{9}23076\dot{3}$; i) $4\cdot58\dot{1}$; j) $8\cdot1244\dot{4}$.

§. 36. E.

32) Među članove geometričke progresije:

a) 5, 40, 320, 2560, ... interpoliraj po 2 člana;

b) 3, 30000, 300000000, ... interpoliraj po 3 člana;

c) 1, 27, 27^2, 27^3 ... interpoliraj po 5 članova; tako, da između sebe i sa zadanim članovima daju novu geometričku progresiju

33) Interpoliraj među 6 i 1536 sedam članova tako, da postane geometrička progresija od 9 članova.

34) Između svakoga tona i njegove oktave (relativne visine 1 i 2) umetnuto je još 11 tonova tako, da ovih 13 tonova čine geometričku progresiju (jednolična muzikalna temperatura).

B. Geometričke progresije i jednadžbe.

U zadaćama, što dolaze, neka se odredi iz zadanih podataka geometrička progresija (imaginarna se riješenja isključuju):

35) $\left|\begin{array}{l} a_2 \cdot a_5 = 800 \\ a_3 \cdot a_7 = 6400 \end{array}\right|$ **36)** $\left|\begin{array}{r} a_1 = 7 \\ a_3 + a_5 = 4550 \end{array}\right|$ **37)** $\left|\begin{array}{r} a_3 - a_2 = 66 \\ a_4 = 297 \end{array}\right|$

38) $\left|\begin{array}{l} S_6 = 1449 \\ S_2 = 69 \end{array}\right|$ **39)** $\left|\begin{array}{l} a_1 + a_3 = 24 \\ a_3 + a_5 = 384 \end{array}\right|$

40) U geometričkoj progresiji od 8 članova je produkt prvoga i osmoga člana 4374, suma četvrtoga i petoga člana 135. Kolika je suma svih osam članova?

41) Dokaži, da je u svakoj geometričkoj progresiji produkt makar kojih dvaju članova, koji su od sredine jednako daleki, konstantan.

42) Četiri člana proporcije daju geometričku progresiju. Suma je izvanjih članova 140, a unutrašnjih 60. Koja je ta proporcija?

C. Primjene geometričke progresije.

43) Po arapskim se izvještajima pripovijeda, da je indijski kralj Šeran, obretniku šaha, Sessa Ebn Daheru, ostavio na volju neka si sam bira nagradu za svoj izum. Ovaj ga zamoli, da mu da sumu svih pšeničnih zrna, koja će izaći, ako na prvo od 64 polja šaha metne 1 zrno, na drugo polje 2 zrna, na treće 4, na četvrto 8 i t. d. na svako polje dva puta toliko zrna, koliko ih je na pređašnjem sve do 64. polja. Kad su adirali, našli su na veliko čudo kralja ogromnu sumu. Koju?

a) Koliko bi mu hektolitara bio morao dati kralj, ako se na hektolitar računa 1·5 milijuna zrna?

b) Koliko bi kubičnih kilometara ta zrna zapremala, ako se uzme, da u jedan cm^3 ide 15 pšeničnih zrna?

c) Koliko bi godina moralo milijun ljudi raditi, da rukama posiju sva ta zrna, sve kad bi se uzelo, da svaki čovjek može poprijeko u svakoj sekundi posijati stotinu zrna?

44) Dječak posije 3 zrna pšenice i upotrijebi svagda svu žetvu za sjeme; koliko godina mora čekati, dok mu žetva dade bar 1 hektolitar (= 1·5 milijuna zrna), ako žetva daje poprijeko deseterostruko sjeme?

45) Kod jedne vrste sabiranja u dobrotvorne svrhe („Schneeballsammlung") plati A mali prinos n. pr. 20 filira i nađe još dvojicu B_1 i B_2, a svaki od ove dvojice dade isti prinos i nađe po 2 osobe u istu svrhu; ako se ovo sakupljanje provede kroz svih 25 slova latinskoga alfabeta do Z, kolika će svota izaći?

46) Kod uzdušne se sisaljke za rastanjivanje uzduha rastanjuje uzduh po zakonu geometričke progresije. Tlak je naime uzduha p nakon n stapaja (Kolbenhub) $p = P \cdot q^n$, ako je P tlak izva-

njega uzduha, a $q = \frac{R}{S+R}$; (tu je R obujam recipienta i kanala, S obujam čižme, kad se je čep do gore dignuo).

a) Obujam je recipienta $R = 375\,cm^3$, obujam čižme $S = 875\,cm^3$; koliko je puta tanji uzduh nakon $n = 11$ stapaja?

b) Obujam je recipienta $20\,cm^3$, čižme $180\,cm^3$; poslije koliko će stapaja biti gustoća uzduha $= 0{\cdot}000000001$?

47) Ako pomislimo, da je stupac uzduha, koji stoji iznad morske površine razdijeljen na vrste po $10\frac{1}{2}$ metara visoke, čine visine barometra u pojedinim vrstama geometričku progresiju. Ako je u najnižoj vrsti visina barometra 760 *mm*, ona je u svakoj susjednoj vrsti samo $\frac{759}{760}$ od predašnje (kod 0^0).

a) Kolik je tlak uzduha u visini od 1039·5 metara, ako je dolje 770 *mm*?

b) Za koliko je više mjesto, na kojem je tlak uzduha 638·3 *mm*, od drugoga, na kojem je u isto doba 750 *mm*?

48) Sofizma Zenona iz Eleje (oko 450 prije Kr.) glasi: „Ahil počinje progoniti kornjaču, koja je ispred njega 1 stadij. Ahil trči tako brzo, da u svakoj sekundi prevali $\frac{1}{10}$ stadija, a kornjača ide tako polako, da u svakoj sekundi prevali tek $\frac{1}{100}$ stadija. Kada Ahil dodje onamo, gdje je kornjača prije bila, odmakla je ova za $\frac{1}{10}$ stadija. Kad je Ahil prešao ovu malu daljinu, kornjača je ispred njega $\frac{1}{100}$ stadija i t. d. Ahil dakle ne može nikada da dostigne kornjaču, jer je ova uvijek ispred njega.“ Dokaži, da će Ahil kornjaču dostignuti nakon $111\frac{1}{9}$ sekunda:

a) Riješenjem jednadžbe, u kojoj je diferencija između puta Ahila i puta kornjače jednaka 1 stadiju i

b) sumiranjem svih vremena, što ih Ahil treba da pređe 1 stadij, $\frac{1}{10}$ stadija, $\frac{1}{100}$ stadija i t. d. (Krivi je zaključak Zenonov u riječima „dakle nikada“, jer suma od neizmjerno mnogo vremenâ, koja čine padajuću geometričku progresiju, nije neizmjerno velika.)

49) Iz jedne točke, koja je na kraku kuta od 60^0, povučena je okomica na drugi krak, iz podnožišta ove okomice opet okomica na prvi krak, onda iz podnožišta ove opet okomica na drugi krak i t. d. bez kraja i konca. Ako je dužina prve okomice a milimetara, kolika je suma neizmjerno velikoga broja tih okomica?

50) U kutu $\alpha = 2\beta$ nacrtan je neizmjerno velik broj krugova, koji se jedan drugoga dotiču izvana i osim toga se svaki dotiče obaju krakova kuta. Kolika je suma:

a) opsega svih tih krugova;

b) suma njihovih pljoština, ako je r polumjer najvećega (izvanjega) nacrtanoga kruga?

§. 37. Sastavljeni kamatni račun. Račun amortizacije i renta.

I. $A_n = A q^n$; $q = 1 + \frac{P}{100}$. II. $S = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Ia. $A_n = \frac{A}{(1-p)^n}$; $p = \frac{P}{100}$. IIa. $S = r \cdot q \frac{q^n - 1}{q - 1}$

III. $A q^n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (formula amortizacije).

Logaritmi najobičnijih kamatnih faktora na 10 decimala.

log 1,01	= 0,0043213738	*log* 1,04	= 0,0170333393.
» 1,02	= 0,0086001718	» 1,0425	= 0,0180760636.
» 1,025	= 0,0107238654	» 1,045	= 0,0191162904.
» 1,0275	= 0,0117818305	» 1,0475	= 0,0201540316.
» 1,03	= 0,0128372247	» 1,05	= 0,0211892991.
» 1,0325	= 0,0138900603	» 1,055	= 0,0232524596.
» 1,035	= 0,0149403498	» 1,06	= 0,0253058653.
» 1,0375	= 0,0159881054		

§. 37. A.

I. Traži se konačna vrijednost glavnice.

1) Kapital A uložen je po $P^0/_0$ na sastavljene kamate. Kolika će mu biti konačna vrijednost nakon n godina uz dekursivno ukamaćivanje?

a) $A = 1200\ K$, $P = 4$. $n = 36$;
b) $A = 5000\ K$, $P = 5$, $n = 50$;
c) $A = 2400\ K$, $P = 4\frac{3}{4}$, $n = 27$;
d) $A = 4567\ K$, $P = 4$, $n = 11$;
e) $A = 41465\ K$, $P = 4\frac{1}{2}$, $n = 20$;
f) $A = 757{\cdot}7\ K$, $P = 3{\cdot}5$, $n = 40$;
g) $A = 370\ K$, $P = 4$, $n = 30$;
h) $A = 2805{\cdot}5\ K$, $P = 3$, $n = 12$;
i) $A = 1996\ K$, $P = 4{\cdot}5$, $n = 25$;
j) $A = 2735\ K$, $P = 4\frac{3}{4}$, $n = 13$.

2) Suma ima sada po procjeni 25000 m^3 drva. Koliko će imati nakon 10 godina, ako se ne bude ništa sjekla i ako na svakih 100 m^3 naraste svake godine 2 m^3?

*

3) Državni dugovi jedne države bili su 1. siječnja 1883. ravnih 14 milijuna franaka. Koliko bi bilo od te svote postalo do 1. siječnja 1900. uz $3\frac{3}{4}\%$, ako se međutim ne bi načinili novi dugovi, niti bi se što otplaćivalo?

4) Kad se je g. 1886. slavila 500-godišnjica sveučilišta u Heidelbergu uloženo je 10 M u tamošnju štedionicu; ta svota mora ostati netaknuta do 1000-godišnjice sveučilišta i tek onda će se predati sa svojim prirastom sveučilištnoj oblasti. Koliko će dobiti sveučilište, ako se računa 3%?

II. Traži se današnja vrijednost kapitala. (Diskontiranje.)

5) Što vrijedi danas kapital A_n, koji pada nakon n godina, ako se računaju sastavljene kamate po $P\%$? (Dekursivno).

a) $A_n = 31160\ K$, $P = 3$, $n = 15$;
b) $A_n = 300000\ K$, $P = 3{\cdot}5$, $n = 17$;
c) $A_n = 1710\ K$, $P = 5$, $n = 11$;
d) $A_n = 6487\ K$, $P = 4$, $n = 30$;
e) $A_n = 9016\ K$, $P = 4{\cdot}5$, $n = 25$;
f) $A_n = 1987\ K$, $P = 3$, $n = 20$;
g) $A_n = 35200\ K$, $P = 5$, $n = 40$;
h) $A_n = 12090\ K$, $P = 3{\cdot}5$, $n = 12$;
i) $A_n = 107110\ K$, $P = 3{\cdot}75$, $n = 50$;
j) $A_n = 1828\ K$, $P = 4\frac{3}{4}$, $n = 13$.

6) Poslije 7 godina ima netko da plati 3600 K. Koliko može sada platiti, ako je disconto $3\frac{1}{2}\%$ i ako se računaju sastavljene kamate?

7) Šuma, koja se na godinu uvećava za $4\frac{3}{4}\%$, izmjerena je na 12000 m^3 drva. Koliko je imala prije 12 godina?

8) Koju bi svotu bio morao Napoleon III. uložiti na dan svoga krunisanja dne 2. prosinca 1852. po 5% na sastavljene kamate, da bi Francuska bila mogla s njom isplatiti Njemačkoj dne 2. prosinca 1871. svoj ratni dug od 5 milijarda (5000000000) franaka?

9) Za najamninu lova na 10 godina nudi A 1300 K u gotovom, B 1600 K nakon 3 godine bez kamata, C 1700 K nakon 5 godina bez kamata. Tko nudi najviše, ako se računa 5%?

III. Traže se postotci.

10) Po koliko je postotaka uložena glavnica A, ako je za n godina narasla na A_n? (Dekursivno.)

a) $A = 18270\ K$, $A_n = 28120\ K$, $n = 11$;
b) $A = 3000\ K$, $A_n = 34400\ K$, $n = 50$;
c) $A = 400000\ K$, $A_n = 1297000\ K$, $n = 30$;
d) $A = 8293\ K$, $A_n = 20000\ K$, $n = 20$;
e) $A = 5500\ K$, $A_n = 9933\ K$, $n = 20$;
f) $A = 2456\ K$, $A_n = 4000\ K$, $n = 10$;
g) $A = 9982\ K$, $A_n = 30000\ K$, $n = 25$;
h) $A = 1403\ K$, $A_n = 2000\ K$, $n = 12$;
i) $A = 850\ K$, $A_n = 5356\ K$, $n = 50$;
j) $A = 500\ K$, $A_n = 914\ K$, $n = 13$.

11) Koliko je postotaka računala trgovina s pokućtvom, ako je nekomu prodala pokućtva za 650 K, pa si je dala za to izdati mjenicu na 1000 K, koja se ima isplatiti nakon 4 godine?

12) Zagreb ima danas oko 60000 stanovnika; prije 30 godina obitavalo je na istom teritoriju jedva 30000 ljudi. Za koliko je postotaka raslo pučanstvo u tom vremenu?

13) Po koliko postotaka treba da je uložena glavnica od 1000 K, da se za 14 godina podvostruči?

14) Šuma, koja je izmjerena na 32500 m^3 drva, uvećala se je u 24 godine za 33566 m^3. Kolik je bio godišnji prirast na 100 m^3?

IV. Traži se broj godina.

15) Za koliko će godina kapital A narasti na A_n uz $P\%$ dekursivnih kamata?

a) $A = 1000\ K$, $A_n = 11470\ K$, $P = 5$;
b) $A = 9134\ K$, $A_n = 14060\ K$, $P = 4$;
c) $A = 1263\ K$, $A_n = 5000\ K$, $P = 3{\cdot}5$;
d) $A = 5000\ K$, $A_n = 8552\ K$, $P = 5$;
e) $A = 111\ K$, $A_n = 360\ K$, $P = 4$;
f) $A = 1500\ K$, $A_n = 4508\ K$, $P = 4{\cdot}5$;
g) $A = 4000\ K$, $A_n = 6044\ K$, $P = 3{\cdot}5$;
h) $A = 125\ K$, $A_n = 880\ K$, $P = 5$;
i) $A = 2000\ K$, $A_n = 3116\ K$, $P = 3$;
j) $A = 1500\ K$, $A_n = 2742\ K$, $P = 4{\cdot}75$.

16) Nakon koliko će godina imati Zagreb 100000 stanovnika, ako bude i dalje rasao po postotku zadaće 13.?

17) Za koliko će se godina podvostručiti glavnica uložena na sastavljene kamate (dekursivno):

a) po 3; b) po 4; c) po $4\frac{1}{2}$; d) po 5; e) po $5\frac{1}{2}\%$?

18) Koje bi godine bilo trebalo uz 4% uložiti na sastavljene kamate jedan novčić, da od kapitala, koji je od njega postao, dobije svaki od 1300 milijuna ljudi, koji su godine 1884. živjeli na zemlji, po jedan milijun forinti?

Bilješka. Velik se broj predašnjih zadaća može računati i uz anticipativno ukamaćivanje.

---

19) Do koje će konačne vrijednosti narasti kapital od:
a) 1575 K po 4% za $9\frac{3}{4}$ godina?
b) 2640 K po $3\frac{1}{2}\%$ za $5\frac{2}{3}$ godina?
c) 1280 K po $2\frac{3}{4}\%$ za 6 godina 10 mjeseci?
d) 68000 K po 5% za 6 godina 6 mjeseci?

---

20) Do koje će konačne vrijednosti narasti kapital od:
a) 5480 K uz 2% polugodišnje za 12 godina?
b) 1950 K uz $2\frac{1}{2}\%$ polugodišnje za 9 godina?
c) 2350 K uz $3\frac{1}{4}\%$ polugodišnje za 10 godina?
d) 1370 K uz $1\frac{1}{8}\%$ četvrtgodišnje za 6 godina?
e) 2475 K uz $1\frac{1}{3}\%$ četvrtgodišnje za 10 godina?
f) 3250 K uz $\frac{2}{5}\%$ mjesečno za 8 godina?
g) 2765 K uz $\frac{1}{2}\%$ mjesečno za 12 godina?

21) Kolika je razlika, ako se kod ulaganja kapitala od 2000 K na 8 godina računa $1{\cdot}25\%$ četvrtgodišnje ili 5% na godinu?

22) Kolik je polugodišnji primjereni (konformni) kamatni faktor, ako se na godinu računa: a) 5%; b) $3\frac{3}{4}\%$; c) $4\frac{2}{3}\%$?

23) Kolik je četvrtgodišnji primjereni kamatni faktor, ako se na godinu računa: a) 4%; b) $5\frac{1}{3}\%$; c) $6\frac{1}{8}\%$?

---

§. 37. B.

24) Kolika je danas 10 godina konačna vrijednost od deset godišnjih uložaka po 100 K, od kojih će se prvi uplatiti danas godinu dana, a posljednji danas 10 godina, ako se računa: a) 4%; b) $4\frac{3}{4}\%$?

25) Pomorac je od g. 1860. amo koncem svake godine slao 350 for. u štedionicu, koja računa $3\frac{1}{2}\%$, pa si nije dao nikada isplaćivati kamate. Kolik mu je bio imutak g. 1884.?

26) Najamnik ostao je 8 godina dužan godišnju najamninu od 280 for. Koliko treba da plati koncem 8. godine, ako se računa 4% sastavljenih kamata?

27) Činovnik prišteđi od svoje plaće svake godine 150 K i odnese tu svotu koncem svake godine u štedionicu. Kolik će kapital podignuti nakon 20 godina, ako se računa $3\frac{1}{2}\%$?

28) Netko ulaže koncem svake godine određenu svotu i može nakon 12 godina dignuti 1803 K. Koliko je ulagao svake godine uz 4%?

29) Netko ulaže koncem svake godine svotu r na sastavljene kamate. Nakon koliko će godina moći dignuti svotu Σ, ako se računa $P\%$?
a) $r = 300\ K$, $\Sigma = 4500\ K$, $P = 4$;
b) $r = 480\ K$, $\Sigma = 8200\ K$, $P = 3$.

30) Netko ulaže 18 godina početkom svake godine 240 K na sastavljene kamate. Kolik će kapital dignuti nakon 18 godina, ako se računa 5%?

31) Netko je početkom svake godine ulagao određenu svotu na sastavljene kamate. Nakon 12 godina može dignuti 9534 K. Koliko je svake godine uplaćivao, ako se računa $4\frac{1}{4}\%$?

32) Netko ulaže početkom svake godine svotu r na sastavljene kamate. Nakon koliko će godina moći podignuti svotu Σ, ako se računa $P\%$?
a) $r = 150\ K$, $\Sigma = 3400\ K$, $P = 5\%$;
b) $r = 225\ K$, $\Sigma = 6225\ K$, $P = 3\%$.

---

33) Kapitalu od 4300 K prilaže se koncem svake godine, u svemu 20 puta, 200 K. Koliki je time postao kapital uz 5% sastavljenih kamata u času, kad je posljednji put uplaćeno 200 K?

34) Činovnik je početkom godine 1880. uložio 6500 forinti na sastavljene kamate i od onda koncem svakoga mjeseca prilagao od svoje plaće 125 forinti. Kolik je kapital mogao podignuti godine 1888., ako se računa mjesečno $\frac{1}{3}\%$?

35) Kapitalista, koji ima imutak od 600.000 K, dobiva od njega 5% i treba za svoju kuću na godinu 6000 K. Kolik će mu biti imutak nakon 12 godina?

36) Dug od 2578 K, koji je ukamaćen po 5%, isplaćuje se tijem, da se koncem svake godine otplati 100 K. Kolik je dug nakon 10 godina?

37) U općinskoj šumi, koja ima 10000 m^3 drva, i godišnji prirast od 5%, sijeku koncem svake godine 800 m^3 drva. Koliko će još drva imati šuma nakon 10 godina?

§. 37. c.

I. Traži se anuiteta.

38) Dug od 3816 *K*, ukamaćen po 4%, treba otplatiti u 5 godišnjih jednakih obroka. Kolika je anuiteta?

39) Država je sklopila zajam od 3 milijuna forinti po 5% i hoće da ga isplati za 25 godina tijem, da koncem svake godine otplaćuje stalnu svotu. Kolika je ta svota?

40) Netko bi morao odmah isplatiti dug od 35·780 *K*, ali se obveže, da će ga isplatiti u 15 dekursivnih anuiteta uz $4\frac{1}{2}\%$ sastavljenih kamata. Kolika je anuiteta?

41) Dug se od 2506·44 *K* amortizira u 8 godišnjih otplata koncem svake godine. Kolika je godišnja otplata uz $4\frac{1}{2}\%$ sastavljenih kamata?

42) Kolika je godišnja otplata, ako su mjesto brojeva 2506·44, 8, $4\frac{1}{2}$, zadani brojevi 800 *K*, 5%, 10 godina?

43) $3\frac{1}{2}$-postotni zajam od jednoga milijuna kruna treba da je isplaćen za 25 godina. Koliko treba odrediti za amortizaciju koncem svake godine i kolika je ta godišnja otplata u procentima početnoga kapitala?

44) Kapital se od 16582·70 *K*, koji bi trebalo odmah platiti, amortizira u 10 dekursivnih godišnjih otplata; kolika je jedna otplata uz 5·5%?

45) Netko ostavi svomu 14-godišnjemu sinu imutak od 6000 *K*, koji nosi 5%. Koliko smije tutor na uzgoj dječaka najviše trošiti svake godine, da imutak izmogne do svršene njegove 24. godine: a) ako uzgojni prinos diže početkom svake godine; b) ako ga diže koncem svake godine?

II. Traži se početni kapital.

46) Kolik je dug, koji se može isplatiti za 13 godina godišnjom otplatom od 1550 *K*, ako je ukamaćen po $3\frac{1}{2}\%$?

47) Grad hoće da digne kod banke zajam s obvezom, da će ga isplatiti za 20 godina dekursivnom anuitetom od 10000 K. Koju će svotu banka gradu moći posuditi uz 4% sastavljenih kamata?

48) *A* je početkom neke godine uložio određenu svotu novca na sastavljene kamate i koncem svake godine uzimao 625 *K*. Kolik je bio uloženi kapital, ako je uz $4\frac{3}{4}\%$ baš za 8 godina potrošen?

49) Netko je od baštine, ukamaćene po $3\frac{7}{8}\%$, koncem svake godine trošio 1200 *K*. Kolika je bila baština, ako je za 20 godina bila baš potrošena?

50) Netko je na početku godine uložio određenu svotu na sastavljene kamate i na koncu svakoga mjeseca oduzimao 225 *K*. Kolik je početni kapital, ako je uz $\frac{1}{4}\%$ mjesečno nakon 12 godina baš potrošen bio?

II. Traži se vrijeme.

51) Za koliko će se godina amortizirati dug od 10000 *K* godišnjom otplatom od 2373·93 *K*, ako se računa 6% sastavljenih kamata?

52) Nakon koliko će godina biti amortiziran zajam od 11 milijuna kruna, ukamaćen po 5%, ako se upotrijebi koncem svake godine za otplatu svota od 715566 kruna?

53) Grad je sklopio zajam od 80000 *K* i upotrebljava koncem svake godine za amortizaciju toga duga, ukamaćenoga po 5%, svotu od 6419·46 *K*; nakon koliko će godina biti isplaćen zajam?

54) Kolikim će se brojem dekursivnih anuitetâ od 768·70 *K* amortizirati zajam od 10000 *K* uz $4\frac{1}{2}\%$ sastavljenih kamata?

55) Na nekom je imanju hipotekaran dug od 20000 *K* s pogodbom, da se otplaćuje u polugodišnjim dekursivnim otplatama od 777·33 *K* i da je ukamaćen po 3% polugodišnje. Nakon koliko će godina biti isplaćen dug? Nakon koliko će godina biti otplaćena polovina duga?

56) Za dug od 20000 *K* založeno je zemljište, koje daje na godinu čist prihod od 1500 *K*. Koliko se godina smije upotrijebiti zemljište kao zalog uz 5% sastavljenih kamata? (Smišljaj je, da čisti prihod ulazi koncem godine).

57) Šuma je ocijenjena na 30500 m^3 drva; uvećava se za 2%; za koliko će je godina nestati, ako se na koncu svake godine posiječe 1400 m^3?

Račun renta.

I. Traži se renta.

58) Kolika se *n*-godišnja renta može dobiti uz *P*% za kapital *A*?

a) $n = 30$, $P = 5$, $A = 100000\ K$;
b) $n = 11$, $P = 3$, $A = 13880\ K$;
c) $n = 20$, $P = 3{\cdot}5$, $A = 99485\ K$;
d) $n = 15$, $P = 5$, $A = 10380\ K$;
e) $n = 13$, $P = 3\frac{3}{4}$, $A = 300000\ K$;
f) $n = 16$, $P = 4\frac{1}{4}$, $A = 4862\ K$.

II. Traži se gotovina rente (početni kapital).

59) Što stoji (što je današnja vrijednost ili gotovina) renta r, koja se mora dekursivno isplaćivati n godina uz $P\%$?

a) $r = 300\ K$, $n = 11$, $P = 3$;
b) $r = 6475\ K$, $n = 10$, $P = 5$;
c) $r = 1630\ K$, $n = 40$, $P = 4{\cdot}5$;
d) $r = 5437\ K$, $n = 30$, $P = 3{\cdot}5$;
e) $r = 1149\ K$, $n = 25$, $P = 3$;
f) $r = 5587\ K$, $n = 14$, $P = 3\frac{3}{4}$.

60) Netko se je obvezao, da će 10 godina koncem svake godine plaćati 200 K. Po što može ovu obvezu sada otkupiti, ako se računa 5% sastavljenih kamata?

61) Netko ostavi svoj čitavi imutak baštinicima uz uvjet, da isplaćuju vjernomu slugi njegovom 12 godina koncem svake godine 175 K. Po što mogu baštinici otkupiti ovu obvezu, ako se računaju sastavljene kamate po 4%?

III. Traži se broj godina.

62) Koliko godina daje glavnica A dekursivnu rentu r, ako se računa $P\%$ sastavljenih kamata?

a) $A = 5436\ K$, $r = 400\ K$, $P = 4$;
b) $A = 200000\ K$, $r = 10869\ K$, $P = 4{\cdot}5$;
c) $A = 25000\ K$, $r = 3238\ K$, $P = 5$;
d) $A = 50000\ K$, $r = 2719\ K$, $P = 3{\cdot}5$;
e) $A = 1144\ K$, $r = 100\ K$, $P = 4{\cdot}25$;
f) $A = 20000\ K$, $r = 2129\ K$, $P = 5$.

63) Netko proda nekretninu za 100000 K uz uvjet, da mu se početkom svake godine isplaćuje renta od 6437·50 K. Koliko će godina dobivati tu rentu, ako su ugovoreni postotci $5\frac{1}{2}$ i ako se prva renta isplati odmah iza sklopljenoga ugovora?

---

64) Izvedi formulu za gotovinu vječne rente iz formule amortizacije, ako u njoj supstituiraš $n = \infty$.

65) Koliko vrijedi uz 5% danas šuma, koja trajno daje rentu od 5000 K koncem svake godine?

66) Općina je dužna, da drži u redu putove u svom području i troši za to svake četvrte godine 450 K. Ona želi, da tu obvezu prenese na državu. Koliko može da ište država za to uz 5%?

Sastavljeni kamatni račun i račun renta.

67) Netko uloži 16000 K na sastavljene kamate, da si osigura početkom svake godine rentu od 1200 K, koja će početi tek poslije 8 godina; koliko će godina dobivati tu rentu, ako se njegov uložak kapitalizira po 4%?

68) Glavnica od 2500 K uložena je 12 godina na sastavljene kamate; koliko se daljnjih godina može od kapitala, koji se je tim načinom uvećao, dobivati koncem svake godine renta od 1300 K, ako se računaju kamate (za jedno i drugo) po $4{\cdot}5\%$?

69) Koliko godina treba 2000 K uložiti na sastavljene kamate, da uz kamatnjak od 4% daju 10 daljnjih godina rentu od 365 K?

70) Koliko godina treba da je uložen kapital 2500 K na sastavljene kamate uz $2\frac{1}{4}\%$ polugodišnje, da pokrije godišnju anticipativnu rentu od 1800 K uz $4\frac{1}{2}\%$ godišnjih kamata na 15 godina?

71) Ako se kapital od 20000 K uloži 20 godina na sastavljene kamate, kolika se renta može onda uz kamatnjak od 5% dobivati 10 daljih godina od uvećanoga kapitala?

72) Koji kapital treba 18 godina uložiti na sastavljene kamate, da se od uvećanoga kapitala može dobivati daljnjih 13 godina renta od 1000 K uz 3%?

73) Netko uplaćuje od svoje 29. do svoje 40. godine (dakle 12 puta) svagda početkom godine neku svotu u banku, da si osigura rentu od 2000 K, koja će mu se isplaćivati 20 godina zasebice. Koliko mora da uplaćuje svake godine, ako prva renta pada na konac njegove 40. godine, pa se računa $3\frac{1}{2}\%$?

74) Koliko mora netko 30 godina koncem svake godine ulagati na sastavljene kamate, da može poslije toga vremena 20 godina uživati rentu od 1500 K, ako se računa 5%?

§. 38. Verižni razlomci.

I. $$\begin{cases} p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2} \\ q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2} \end{cases}$$

II. $$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1} \cdot q_n} \quad \text{ili} \quad p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1} = (-1)^n.$$

§. 38. A.

1) Neka se razviju u verižne razlomke ovi omjeri (obični razlomci):

a) $\frac{7}{11}$; b) $\frac{9}{13}$; c) $\frac{37}{571}$; d) $\frac{111}{717}$; e) $\frac{437}{5729}$; f) $\frac{7821}{24567}$;

g) $\frac{25}{56}$; h) $\frac{151}{121}$; k) $\frac{115}{151}$; l) $\frac{32280}{36931}$; m) $\frac{9976}{6961}$; n) $\frac{76}{123}$.

2) Neka se razviju u verižne razlomke ovi decimalni razlomci:
a) 0·17; b) 0·137; c) 0·249; d) 7·23891; e) $4\cdot\dot{2}\dot{9}$;
f) $0\cdot\dot{6}\dot{7}$; g) $2\cdot56\dot{7}\dot{8}$.

3) Neka se razviju u verižne razlomke omjeri:
a) $\frac{bc+1}{(ab+1)c+a}$; b) $\frac{bcd+d+b}{abcd+cd+ad+ab+1}$;
c) $\frac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}$;
d) $\frac{48n^3+188n^2+252n+115}{48n^4+236n^3+464n^2+425n+151}$.

4) Neka se pretvore u obične razlomke ovi verižni razlomci:
a) $V(2, 3, 4, 5)$; b) $V(1, 3, 5, 7)$; c) $V(10, 10, 10. 10)$;
d) $V(2, 3, 4, 9)$; e) $V(10, 1, 5, 1, 2)$; f) $V(1, 1, 1, 3, 3, 1, 4, 1)$;
g) $V(1, 2, 1, 1, 5, 2, 1, 2)$; h) $V(a, b, c, d)$; i) $V(a, a^2, a^3, a^4)$.

§. 38. B. i C.

5) Razvij u verižne razlomke i odredi sve približne vrijednosti razlomaka:
a) $\frac{479}{6628}$; b) $\frac{55}{117}$; c) $\frac{251}{1313}$; d) $\frac{3370}{399}$; e) $\frac{51}{16}$; f) $\frac{3696}{11593}$;
g) 2·718281828459.

6) Odredi n-ti približni razlomak, ako znaš, da je n-ti parcijalni nazivnik 2, i da su dva približna razlomka pred njim $\frac{22}{37}$ i $\frac{3}{5}$.

7) Odredi samo one približne razlomke, koji imaju najviše po dvije cifre u brojniku i nazivniku za razlomke:
a) $\frac{1281}{1682}$; b) $\frac{236}{1155}$; c) $\frac{173}{271}$; d) 3·7564.

§. 38. D.

8) Razvij u periodične verižne razlomke:
a) $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{26}$; c) $\sqrt{3}$; d) $\sqrt{51}$; e) $\sqrt{27}$; f) $\sqrt{23}$;
g) $\sqrt{53}$; h) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$; i) $\frac{1}{2}\sqrt{13} - \frac{3}{2}$.

9) Pretvori periodične verižne razlomke, koji dolaze, u kvadratne korijene:
a) $V(3, \ldots)$; b) $V(2, \ldots)$; c) $V(2, 3, \ldots)$; d) $V(4, 1, \ldots)$;
e) $V(1, 2, 3, \ldots)$; f) $V(4; 2, 6 \ldots)$; g) $V(12; 3, 1 \ldots)$.

§. 38. E.

Izrazi manjim brojevima ove omjere:

10) Omjer premjera kruga prama njegovom opsegu: 1:3·1415926536.

11) Omjer premjera zemlje prama premjeru sunca: 1719:192936.

12) Omjer najmanje daljine zemlje od sunca prama najvećoj daljini: 0·9832249 : 1·0167715.

13) Omjer zemaljskoga polumjera k jednomu polu prama zemaljskom polumjeru k jednoj točki na ekvatoru: 326113933 : 327207714.

14) Omjer gustoće zemlje prama gustoći mjeseca: 1000 : 605.

15) Našemu je računanju vremena osnova godina t. j. vrijeme, u kojem se zemlja, koja je dne 21. ožujka u proljetnoj točki ekliptike, opet vrati k toj točki; ova je „tropska“ godina promjenljiva i ima srednju vrijednost 365 dana 5 sati 48 minuta 47·57 sekunda. Neka se odredi omjer godine prama danu:

$$\left(364+\frac{5}{24}+\frac{48}{24.60}+\frac{47\,57}{24.60.60}\right):1.$$

Bilješka. U julijanskom kalendaru, kojega se još drže Rusi, uzima se za godinu $365^1/_4$ dana, pa je prama tomu svaka četvrta godina prestupna. — Po našem gregorijanskom kalendaru (od g. 1582) uzima se za godinu $365^{97}/_{400}$ dana, pa poradi toga ima u 400 godina samo 97 prestupnih godina.

16) Neka se odredi omjer srednjega „sinodičnoga“ mjeseca t. j. vremena od jednoga mlađa do drugoga prama tropskoj sunčanoj godini: 29·530588 : 365·24222.

Bilješka. Razlomak $^{19}/_{235}$, koji se ovdje pokazuje, daje „mjesečev ciklus“ (Metonov ciklus) kronologije. Po tom se 235 sinodičkih mjeseci izjednačuje s 19 godina. Poslije 19 godina padaju dakle faze mjeseca na isti dan u godini, a po tom se i ponavljaju pomrčine sunca i mjeseca nakon 19 godina.

17) Omjer geografske milje prama kilometru: 7·42044 : 1.

18) Omjer stadija prama kilometru: 184·98 : 1000.

19) Omjer diagonale kvadrata prama stranici njegovoj.

20) Omjer stranice pravilnoga deseterokuta prama polumjeru opisanoga kruga.

21) Omjer stranice pravilnoga peterokuta prama polumjeru opisanoga kruga.

22) Omjer broja samoubojica u Europi u g. 1875. prama broju u g. 1878 : 10104 : 12455.

23) Austro-ugarska kruna vrijedi 0·85 njemačkih maraka, za koliko je njemačkih feniga kruna po drugoj približnoj vrijednosti premalena, a po trećoj prevelika?

24) Neka se s pomoću približnih razlomaka izračunaju Briggovi logaritmi ovih brojeva:
a) *log* 195; b) *log* 54321; c) *log* 3·1415926 ($=\pi$).

25) Riješi s pomoću verižnih razlomaka (Lagrangeova metoda) ove diofantičke jednadžbe u cijelim brojevima:
a) $7x - 9y = 1$; b) $13x - 19y = 1$; c) $25x - 7y = 9$;
d) $4x + 11y = 38$; e) $5x + 9y = 68$; f) $7x = 11y + 1$;
g) $34x - 21y = 1$; h) $34x = 41y + 1$; i) $99x - 70y = 13$;
j) $17x - 19y = 23$; k) $19x - 11y = 112$;
l) $222x - 383y = 6533$.

Deveti odsječak.

Kombinatorika. Vjerojatnost.

§. 39. Tri kombinatoričke operacije.

I. $P(n) = 1.2.3 \ldots n = n!$; II. $P_{\alpha}(n) = \frac{n!}{\alpha!}$;

III. $V_k(n) = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$; IV. $^{\circ}V_k(n) = n^k$;

V. $C_k(n) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} = \binom{n}{k}$; VI. $^{\circ}C_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$.

§. 39. A.

1) Odredi broj inversija u kompleksiji:
a) 21354; b) *dcba*; c) 615243; d) 82736451; e) 7531246;
f) 7541236.

2) Za koliko se promijeni broj inversija u 698132547, ako se izmijene elementi 1 i 5.

3) Na jednoj strani stola sjedi 10 osoba po redu svoga čina. Koliko će inversija u tom redu nastati, ako prva osoba zamijeni svoje mjesto sa sedmom, a peta s trećom?

§. 39. B.

4) Koliko permutacija daju elementi:
a) *abcde*; b) Joso, Martin, Vlaho, Božo?

5) Koliko različitih rasporeda mogu dati faktorima produkta:
a) *pqrs*; b) *pqrstu*; c) *abcdefghik*?

6) Koliko brojeva s 5 cifri ima, koji svi imaju cifre 1, 2, 3, 4, 5?

7) Kolik je: a) $P(6)$; b) $P(7)$; c) $P(n):P(n-2)$?

8) Koliko je puta tako velik $P(15)$ kao: a) $P(14)$; b) $P(13)$?

9) Odredi broj permutacija u kompleksijama:
a) *aab*; b) *aabb*; c) *aaabb*; d) *aaabbb*; e) *aabbc*;
f) *aaabc*; g) *aaabbbcd*; h) *aabbbcd*; i) *aaabbbccc*.

10) Koliko se različitih redova može sastaviti od 8 kamečaka, od kojih su 4 crna i 4 bijela?

11) Od elemenata *abcde* sastavi one permutacije, koje se počinju:
a) s *b*; b) s *ca*.

12) Od elemenata *fghikl* sastavi permutacije, koje se počinju:
a) s *hgf*; b) s *fgkl*.

13) Koja je permutacija od *abcde* (leksikografični red slova):
a) *adbec*; b) *bdace*; c) *ecbda*?

14) Odredi od kompleksije *mnopqr*: a) 444., b) 555. i c) 666. permutaciju.

15) Riječi, koje se razlikuju tek rasporedom slova i osim toga imaju nekakovo značenje, čine „anagram“. Koliko bi permutacija u leksikografičnom redu trebalo načiniti, da se dođe: a) od *amor* na *aroma*; b) od *amor* na *roma*; c) od *heidelberg* na *geld herbei*?

§. 39. C.

16) Kolik je broj variacija bez ponavljanja: a) drugoga razreda; b) trećega razreda; c) četvrtoga razreda, ako je zadano: α) 4; β) 5; γ) 6; δ) 7; ε) n elemenata?

17) Iz normalne kompleksije *abcde* izvedi deset prvih variacija bez ponavljanja: a) drugoga, b) trećega, c) četvrtoga razreda.

18) Iz normalne kompleksije *mnopqr* izvedi 12 prvih variacija bez ponavljanja: a) trećega; b) četvrtoga; c) petoga razreda.

19) Koja je po broju variacija (bez ponavljanja) od *fghik*: a) drugoga razreda *hi*, b) trećega razreda *kgf*, c) četvrtoga razreda *ihgf*?

20) Koja je po broju variacija (bez ponavljanja) od *abcdef*: a) trećega razreda *dcb*; b) četvrtoga razreda *abef*; c) petoga razreda *edcba*?

21) Odredi od *mnopq*: a) 8. variaciju drugoga razreda; b) 28. variaciju trećega razreda; c) 48. variaciju četvrtoga razreda. (Sve bez ponavljanja.)

§. 39. D.

22) Izvedi variacije drugoga razreda sa ponavljanjem iz normalne kompleksije: a) *ab*; b) *abc*; c) 1234.

23) Kolik je broj variacija sa ponavljanjem: a) drugoga, b) trećega, c) četvrtoga razreda, ako je zadano: α) 4, β) 5, γ) 6, δ) 7, ε) n elemenata?

24) Koliko ima brojeva s četiri cifre?

25) Koliko ima brojeva s četiri cifre, u kojima su samo tâki brojevi (računa se i nula)?

26) Kod Morseovog se brzojava sastavljaju slova tijem, da se načine sve variacije s ponavljanjem od prvoga do četvrtoga razreda od znakova „.“ i „—“. Koliko se znakova za slova može sastaviti?

§. 39. E.

27) Kolik je broj kombinacija bez ponavljanja: a) drugoga, b) trećega, c) četvrtoga, d) petoga razreda, ako je zadano: α) 6, β) 7, γ) 8, δ) 9, ε) 10, ζ) 13 elemenata?

28) Izvedi iz normalne kompleksije *abcde*: a) prvih 8 amba; b) prvih 6 terna; c) prva 4 kvaterna bez ponavljanja.

29) Izvedi iz normalne kompleksije *mnopqr*: a) prvih 9 terna; b) prvih 7 kvaterna; c) prvih 5 kvinterna.

30) Koliko kemičkih sastavaka između jednoga atoma jednoga kemičkoga elementa i jednoga atoma drugoga kemičkoga elementa može biti, ako uzmemo, da ima 80 elemenata?

31) Na koliko se različitih načina mogu izvući iz igre od 52 karte: a) 2, b) 3, c) 4 karte?

32) Na koliko načina možeš: a) 18 različitih karata razdijeliti među 2 osobe tako, da prva dobije 10, a druga 8 karata; b) 12 različitih kuglica razmjestiti u dva ormara, da ih bude u prvom 7, a u drugom 5?

33) Na koliko načina možeš a) 12 različitih karata razdijeliti među 3 osobe, da prva dobije 5, druga 4, a treća 3 karte; b) 15 različitih kuglica razmjestiti u 3 ormara, da bude u prvom 4 kuglice, u drugom 5, u trećem 6?

34) Koliko se hitaca može baciti, da na svim kockama gledaju gore različiti brojevi kod a) 2, b) 3, c) 4 kocke?

35) Na koliko se načina mogu razdijeliti karte: a) kod igre „skat“, b) kod igre „whist“?

Bilješka. Kod skata igraju tri osobe i od 32 karte dobije svaka osoba 10 karata, a dvije se polože posebno; kod whista igraju četiri osobe i od 52 karte dobije svaka 13 karata.

§. 39. F.

36) Izračunaj:

a) $\binom{10}{3}$; b) $\binom{9}{4}$; c) $\binom{8}{5}$; d) $\binom{20}{3}$.

37) Koji broj kombinacija daje:

a) $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}$; b) $\binom{8}{4}+\binom{8}{3}$; c) $\binom{10}{7}+\binom{10}{8}$;

d) $\binom{11}{10}+\binom{11}{11}$.

38) U ravnini je 7 rpa točaka; u prvoj su rpi 3 točke, u drugoj 4 i t. d., u sedmoj je 9 točaka. Od svake tri točke svake rpe načinjen je trokut. Koji broj kombinacije kazuje broj svih trokuta?

§. 39. G.

39) Kolik je broj kombinacija sa ponavljanjem: a) drugoga; b) trećega; c) četvrtoga razreda, ako je zadano: α) 4; β) 5; γ) 6; δ) 10 elemenata?

40) Kombiniraj s a ponavljanjem elemente: a) ab; b) abc; c) $abcd$; d) 1, 2, 3, 4, 5; e) točka, tangenta, krug u α) drugi, β) treći razred.

41) Koliko sastavljenih brojeva daju primfaktori 2, 3, 5, 7, 11, ako su u svakom broju po tri primfaktora?

42) Načini od $abcde$: a) prvih 8 kombinacija drugoga razreda s a ponavljanjem; b) prvih 6 kombinacija s a ponavljanjem trećega razreda; c) prve 4 kombinacije četvrtoga razreda s a ponavljanjem.

§. 40. Neke primjene kombinatorike.

I. $(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x + \binom{n}{n}a^n$

II. $a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}b_1 + \binom{n-1}{2}c$; III. $S_n = \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}b_1 + \binom{n}{3}c$;

IV. $a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}b_1 + \binom{n-1}{2}c_1 + \binom{n-1}{3}d$;

V. $S_n = \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}b_1 + \binom{n}{3}c_1 + \binom{n}{4}d$.

§. 40. A. i B.

1) Odredi b e z izvođenja multiplikacije produkte:
a) $(x+2)(x+3)(x+4)$; b) $(x+3)(x+5)(x+7)$;
c) $(x+10)(x+20)(x+30)$.

2) Isto:
a) $(x-1)(x+2)(x+3)$; b) $(x+2)(x-4)(x-6)$;
c) $(x-7)(x-1)(x-4)$.

3) Isto:
a) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$;
b) $(x+7)(x+5)\,x+3)(x+1)$;
c) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)$.

4) Isto:
a) $(x+1)(x-2)(x+3)(x+4)$;
b) $(x-1)(x+3)(x-5)(x+7)$;
c) $(x-5)(x-10)(x-15)(x-20)$.

5) Isto:
a) $(x+a)^3$; b) $(x+a)^4$; c) $(x+a)^5$.

---

6) Razvij:
a) $(x+a)^8$; b) $(1+a)^9$; c) $(a-b)^7$; d) $(a-1)^{10}$.

7) Razvij:
a) $(x^2+y^2)^6$; b) $(a^3-b^4)^5$; c) $(a+3)^7$; d) $(x-0{\cdot}5)^6$.

8) Izračunaj:
a) $(a+b)^6+(a-b)^6$; b) $(x+y)^6-(x-y)^6$;
c) $(1+x)^6-(x-1)^6$.

9) Izračunaj:
a) $(1+x)^7+(1-x)^7$; b) $(a+2)^7-(a-2)^7$.

10) Izračunaj:
a) $(c-d)^8+(c+d)^8$; b) $(y+1)^8-(1-y)^8$;
c) $(x+3)^8+(x-3)^8$.

11) Napiši: a) 9. član u redu za $(x+a)^n$; b) 6. član u redu za $(x-a)^n$.

12) Reci: a) 5. član u redu za $(a+b)^{10}$; b) 4. član u redu za $(a-b)^{20}$.

13) Što je koeficient: a) ispred x^6a^{n-6} u redu za $(x+a)^n$;
b) ispred x^5y^4 u redu za $(x+y)^9$; c) ispred x^5y^5 u redu za $(x-y)^{10}$?

14) Napiši članove s najvećim koeficientima u redu za a) $(x+y)^7$;
b) $(4+p)^9$; c) $(\frac{2}{11}+r)^{11}$.

15) Razvij u algebraičku sumu sa što manjim brojem članova:
a) $(a+\sqrt{2})^4$; b) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$; c) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^7$;
d) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^6$; e) $(\sqrt{7}-\sqrt{8})^5$; f) $(3+i)^8$;
g) $(10-3i)^7$; h) $(2+3i)^5$; i) $(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{2})^3$;
j) $(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3})^6$; k) $(5-i\sqrt{3})^7-(5+i\sqrt{3})^7$.

16) Izračunaj s pomoću binomskoga poučka:
a) $(1+\frac{1}{10})^4$; b) $(1-\frac{1}{10})^5$; c) $0{\cdot}99^6$; d) $1{\cdot}002^{30}$ (na 6 mjesta); e) $0{\cdot}98^{10}$ (na 5 mjesta); f) $(\frac{199}{200})^{24}$ (na 6 mjesta).

§. 40. C.

I. *Aritmetičke progresije drugoga reda.*

17) Sastavi aritmetičku progresiju d r u g o g a reda, u kojoj je a) prvi član 1, a niz diferencija 3, 5, 7, 9, . .; b) prvi član 1, a niz diferencija $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4 . . .; c) prvi član 6, a niz diferencija počinje s 10, pa ima konstantnu diferenciju α) 4; β) 20; γ) -4.

18) Kolik je a_n i S_n u aritmetičkoj progresiji drugoga reda, ako je:
a) $a_1=4$, $b_1=3$, $c=2$, $n=10$;
b) $a_1=5$, $b_1=4$, $c=3$, $n=20$.

19) Kolik je a_1 i c, ako je:
a) $b_1=1$, $a_n=68$, $S_n=310$, $n=12$;
b) $b_1=2$, $a_n=111$, $S_n=451$, $n=11$.

*

20) Kolik je c i s, ako je:
a) $a_1 = -276$, $b_1 = 1$, $a_n = 0$, $n = 24$;
b) $a_1 = -300$, $b_1 = 1$, $a_n = 0$, $n = 25$.

II. *Aritmetičke progresije trećega reda.*

21) Odredi u aritmetičkoj progresiji trećega reda a_n i S_n, ako je:
a) $a_1 = 6$, $b_1 = 5$, $c_1 = 4$, $d = 3$, $n = 10$;
b) $a_1 = 5$, $b_1 = 4$, $c_1 = 3$, $d = 2$, $n = 11$.

22) Odredi u aritmetičkoj progresiji trećega reda a_1 i b_1, ako je:
a) $c_1 = 2$, $d = 1$, $a_n = 140$, $S_n = 438$, $n = 9$;
b) $c_1 = 2$, $d = 3$, $a_n = 155$, $S_n = 358$, $n = 8$.

§. 40. D.

23) Odredi osmi a) trokutni broj; b) četverokutni broj; c) trostrani piramidalni broj; d) četverostrani piramidalni broj.

24) a) Kolika je suma pljoština od 20 kvadrata, kojima su stranice dugačke 1, 2, 3 itd. do 20 centimetara?
b) Riješi ovu zadaću za 30 kvadrata sa stranicama od 1, 2, 3 i t. d. do 30 centimetara.

25) Neki je broj kugala u 12 vrsta tako poređan, da je postao oblik upravne trostrane piramide; koliko je kugala u rpi?

26) Kugle za topove običavaju ređati u rpe, koje imaju oblik trostrane ili četverostrane pravilne piramide. Koliko kugala ima a) trostrana, b) kvadratična piramida i koliko je kugala na tlu, ako rpa ima α) 17, β) 20 vrsta?

27) a) Kolika je suma obujmova od 15 kocaka, ako su bridovi tih kocaka dugački 1, 2, 3 i t. d. do 15 *cm*?
b) Riješi zadaću za 25 kocaka, ako su bridovi 2, 4, 6 i t. d. do 50 *cm*.

28) Suma obujmova kugala s polumjerima 1, 3, 5, 7 i t. d. *cm*. je 1628088 cm^3; koliko je kugala ($\pi = \frac{22}{7}$)? (Bikvadratična jednadžba).

§. 41. Matematička vjerojatnost događaja.

I. $v = \frac{z}{m}$; II. $u = \frac{m-z}{m} = 1 - v$; III. $V_t = v_1 + v_2$;

IV. $V_s = v_1 . v_2$; V. $V_r = \frac{v}{v + v_1}$;

§. 41. A.

1) Kolika je vjerojatnost, da ću kod igre „kruna“ i „pismo“ pogoditi: a) krunu; b) pismo?

2) U razredu su 23 učenika. Početkom se svakoga mjeseca žrijebanjem odlučuje, komu će biti na brigi čišćenje table. Kolika

je vjerojatnost, da će žrijeb pogoditi: a) prvoga đaka; b) dvanaestoga u razredu; c) jednoga od pet odlikaša?

3) Kolika je vjerojatnost, da ću s jednom kockom baciti: a) broj 5; b) broj 2?

4) U žari je 6 crvenih i 7 bijelih kugala; ako se vuče samo jedna kugla, kolika je vjerojatnost, da će biti: a) crvena; b) bijela?

5) Iz igre se od 52 karte vuče jedna karta. Kolika je vjerojatnost a) da ću izvući jednu sliku; b) da ne ću izvući sliku?

6) U kutiji su 4 bijele kuglice, 5 je crvenih i 6 crnih; ako vučem jednu kuglu, kolika je vjerojatnost, da ću pogoditi: a) bijelu; b) crvenu; c) crnu?

7) Ako iz igre od 52 karte vučem samo jednu kartu, kolika je vjerojatnost, da ću pogoditi: a) jednoga kralja; b) jedno srce (coeur); c) jednu crnu kartu?

8) Ako se vuku dvije karte iz igre od 52 karte, kolika je vjerojatnost, da će se pogoditi: a) 2 keca; b) 2 karona?

9) Ako se vuku iz igre od 32 karte dvije karte, kolika je vjerojatnost, da će se pogoditi: a) dvije crne boje; b) dvije karte jednake boje; c) dvije karte nejednake boje; d) dva kralja ili dvije dame?

10) U kutiji je 8 crvenih, 9 bijelih i 10 crnih kuglica. Ako se vuku dvije kugle, kolika je vjerojatnost, da će biti: a) same crvene; b) same bijele; c) same crne?

11) Ako se iz igre od 52 karte vuku tri karte, kolika je vjerojatnost, da će biti: a) sama srca; b) same crne boje?

12) U kutiji je 5 crnih, 7 bijelih i 9 crvenih kuglica. Ako vučem tri kuglice, kolika je vjerojatnost, da ću pogoditi: a) same crne; b) same bijele; c) same crvene?

13) Ako se iz igre od 52 karte vuku četiri karte, kolika je vjerojatnost, da će se pogoditi: a) četiri dame; b) same crvene karte?

14) U kutiji je 6 modrih, 8 žutih i 10 zelenih kuglica. Ako se vuku četiri kuglice, kolika je vjerojatnost, da će se izvući: a) same modre; b) same žute; c) same zelene?

15) Kolika je vjerojatnost, da ću s tri kocke u jednom hitcu baciti 11 oka?

16) Kolika je vjerojatnost, da ću iz potpune igre od 32 karte izvući 3 slike?

17) U žari je 5 bijelih kugala, 6 crvenih i 7 crnih. Kolika je vje-

rojatnost, da će od 6 na jedan put izvađenih kugala biti 1 bijela, 2 crvene i 3 crne?

18) U žari je n kugala. Kolika je vjerojatnost, da ću jednim posezanjem izvaditi: a) *tâki*, b) *lihi* broj kugala?

19) Iz potpune igre od 32 karte vučem tri karte; kolika je vjerojatnost, da ću pogoditi ili 3 crvene ili 1 crvenu i 2 crne?

20) U žari je 10 bijelih i 10 crnih kuglica. Ako izvučem makar kolik broj kuglica, kolika je vjerojatnost, da ću pogoditi jednak broj crnih i bijelih?

§. 41. B.

21) U kutiji je 12 crvenih i 7 bijelih kuglica. Kolika je vjerojatnost, da ću izvući ili same crvene ili same bijele, ako vučem dvije kugle?

22) Ako iz igre od 52 karte vučeš dvije karte, kolika je vjerojatnost, da ćeš pogoditi: a) ili same crvene ili same bijele; b) ili same slike ili ni jednu sliku; c) ili same karone ili ni jedan karo?

23) Kolika je vjerojatnost, da ćeš s 2 kocke baciti: a) ili ispod 5 ili iznad 9; b) ili 6 ili iznad 8?

24) U kutiji je 6 crnih, 9 bijelih i 12 crvenih kuglica. Ako vučeš 3 kuglice, kolika je vjerojatnost, da ćeš pogoditi: a) ili 3 crne ili 3 bijele; b) ili 3 crne ili 3 crvene; c) ili 3 bijele ili 3 crvene?

§. 41. C.

25) Kolika je vjerojatnost, da će se s jednom kockom baciti najprije 6 oka i odmah iza toga 3 oka?

26) Učenik cijeni vjerojatnost, da će za rođendan u lipnju dobiti kotur (bicikl) na $\frac{2}{3}$, a vjerojatnost, da će dobiti prvi red koncem školske godine na $\frac{7}{8}$. Kolika je prema tomu vjerojatnost: a) da će se dogoditi oba radosna događaja; b) da će se dogoditi jedan od obaju; c) da se ne će dogoditi ni jedan?

27) Ako iz igre od 52 karte vučeš dvije karte, kolika je vjerojatnost: a) da ćeš pogoditi jednu kartu sa slikom i jednu kartu bez slike; b) jednu crvenu i jednu crnu kartu; c) jedan karo i i jedno srce (coeur)?

28) U kutiji je 9 bijelih, 10 crnih i 11 crvenih kuglica. Ako se vuku dvije kuglice, kolika je vjerojatnost: a) da će se pogoditi jedna bijela i jedna crna; b) jedna bijela i jedna crvena; c) jedna crna i jedna crvena?

29) Ako se iz igre od 52 karte vuku tri karte, kolika je vjerojatnost, da će se izvući: a) 1 karta sa slikom i 2 karte bez slike; b) 2 crne i 1 crvena karta; c) jedan dječak, jedna dama i jedan kec?

30) U kutiji su 3 bijele kuglice, 6 je crnih, 9 crvenih i 12 žutih. Ako se vuku četiri kuglice, kolika je vjerojatnost, da će se izvući: a) 2 crvene i 2 žute; b) 2 bijele, 1 crvena i 1 crna; c) kuglice različite boje?

31) A govori istinu od 10 puta 9 puta, B pak samo 7 puta. Kolika je vjerojatnost, da je nešto istina: a) ako to oba tvrde; b) ako A tvrdi, a B poriče: c) ako A veli, da je to čuo od B: d) ako B veli, da je čuo od A?

32) Kolika je vjerojatnost, da ću s dvije kocke kod prvoga hitca baciti 9 ili, ako se to ne dogodi, bar kod drugoga hitca taj broj pogoditi?

33) Iz lutrije od 90 srećaka, među kojima je 5 zgoditaka, ima A 4, B 5 srećaka. Kolika je vjerojatnost: a) da će oba dobiti; b) da će A sâm dobiti; c) da će B sâm dobiti; d) da će ili A ili B dobiti; e) da ne će niti A niti B dobiti f) da će barem jedan dobiti?

§. 41 D.

34) U žari su 3 bijele kugle, 4 crne a 5 je crvenih. Kolika je vjerojatnost, da ću iz žare izvući prije crnu nego bijelu?

35) Kolika je vjerojatnost: a) da ću iz igre od 32 karte prije izvući „treff“ nego „karo“; b) da ću prije izvući jedan „treff“ nego pik-keca?

36) Kolika je vjerojatnost, da ću s 3 kocke baciti prije dva ili tri jednaka broja, nego tri nejednaka?

37) U kutiji je 7 bijelih, 5 crvenih, 9 modrih i 14 crnih kugala. Ako se vuku dvije kugle, kolika je vjerojatnost, da ću uhvatiti prije jednu bijelu i jednu modru kuglu, nego li jednu crnu i jednu crvenu kuglu?

§. 41. F.

38) A se kladi s B, da će s jednom kockom baciti 4 oka i uloži 1 K; Koliko može proti tomu uložiti B?

39) A se okladi s B, da ne će iz igre od 52 karte izvući nikakove slike, ako vuče dvije karte i uloži na to 30 filira; koliko može proti tomu uložiti B?

40) U kutiji su 4 bijele kugle, a 5 je crnih. A se okladi s B, da

će izvući ili same bijele ili same crne kugle, ako vuče tri kugle i uloži na to 40 filira; koliko može B uložiti proti tomu?

41) A se okladi s B, da će iz igre od 52 karte izvući jednoga dječaka, jednu damu i jednoga kralja, ako bude vukao tri karte, i uloži u to ime 16 filira; koliko može da uloži proti tomu B?

42) U žari je 5 crnih, 6 bijelih i 7 modrih kuglica; netko se ponudi, da će dati 3 K onomu, koji bude jedan put zahvatio u žaru i izvukao 2 crne, 3 bijele i 4 modre kuglice, ako mu onaj dade 80 filira svaki put, kad izađe 9 drugačijih kuglica. Je li igra pravedna?

43) Kolika je vjerojatnost (po priloženoj tablici mortalitete), da će a) osoba od 9 godina; b) osoba od 18 godina; c) osoba od 47 godina doživjeti 76 godina?

44) Kolika je vjerojatnost, da osoba od 29 godina ne će doživjeti a) 85 godina; b) 68 godina?

45) Koliko je vjerojatno trajanje života za osobu: a) od 10 godina; b) 24 godine; c) 45 godina?

46) Odredi srednje trajanje života za osobu: a) od 89 godina; b) od 91 godine; c) od 95 godina?

Prilog.

Tablica mortalitete po Deparcieux-u.

Starost	Živi	Srednje trajanje života	Starost	Živi	Srednje trajanje života	Starost	Živi	Srednje trajanje života	Starost	Živi	Srednje trajanje života	Starost	Živi	Srednje trajanje života
0	10000	34·4	20	5558	39·7	40	4490	27·0	60	3191	13·6	80	812	4·2
1	7450	45·2	21	5506	39·0	41	4441	26·3	61	3092	13·0	81	697	3·9
2	7088	46·5	22	5453	38·5	42	4392	25·6	62	2990	12·5	82	590	3·6
3	6823	47·3	23	5399	37·9	43	4342	24·9	63	2885	12·0	83	492	3·3
4	6618	47·7	24	5344	37·3	44	4291	24·2	64	2778	11·5	84	404	3·1
5	6468	47·8	25	5288	36·7	45	4239	23·5	65	2669	10·9	85	327	2·8
6	6345	47·8	26	5231	36·1	46	4186	22·8	66	2559	10·4	86	261	2·5
7	6243	47·5	27	5173	35·5	47	4132	22·1	67	2448	9·9	87	206	2·2
8	6154	47·2	28	5116	34·9	48	4077	21·4	68	2336	9·3	88	159	1·9
9	6073	46·9	29	5060	33·4	49	4021	20 7	69	2223	8·8	89	117	1·6
10	6004	46·4	30	5005	33 6	50	3964	20·0	70	2109	8·3	90	80	1·3
11	5946	45·9	31	4951	33·0	51	3905	19·3	71	1993	7·8	91	50	1·0
12	5897	45·2	32	4897	32·4	52	3843	18·6	72	1874	7·3	92	28	0·8
13	5854	44·5	33	4844	31·7	53	3777	17·9	73	1749	6·8	93	14	0·7
14	5815	43·9	34	4792	31·1	54	3707	17·3	74	1616	6·3	94	6	0·6
15	5778	43·2	35	4740	30·4	55	3631	16·6	75	1479	5·9	95	3	0·3
16	5740	42·4	36	4688	29·8	56	3550	16·0	76	1337	5·5	96	1	0·0
17	5699	41·7	37	4637	29·1	57	3465	15·4	77	1198	5·2	97	0	
18	5655	41·0	38	4587	28·4	58	3377	14·8	78	1064	4·6			
19	5608	40·4	39	4538	27·7	59	3286	14·2	79	936	4·5			

Sadržaj.

	Strana
Prvi odsječak. Pristup.	1 — 7
§. 1. O brojenju, brojevima i zadaćama aritmetike (25) . .	1
§. 2. Jednadžbe, nejednadžbe i aksiomi (34)	4
Drugi odsječak. Računske operacije prvoga stupnja	8 — 21
§. 3. Adicija i zakoni adicije (66)	8
§. 4. Suptrakcija (88)	11
§. 5. Pravila za prvi stupanj (103)	14
§. 6. Nula i negativni brojevi (89)	17
Treći odsjećak. Računske operacije drugoga stupnja	22 — 46
§. 7. Pojam i zakoni multiplikacije (189)	22
§. 8. Pojam i zakoni divizije (72)	28
§. 9. Pravila za drugi stupanj (83)	30
§. 10. Razlomljeni brojevi (106)	38
Četvrti odsječak. Primjene računskih operacija prvoga i drugoga stupnja (I. dio)	47 — 66
§. 11. Razvijanje i ujednostručivanje izraza. Glavni oblik izraza (76)	47
§. 12. Svojstva prirodnih brojeva (75)	52
§. 13. Sustavi brojeva i znaci za brojeve (13)	57
§. 14. Decimalni razlomci (38)	59
§. 15. Temeljne operacije s nepotpunim brojevima (37) . .	63
Peti odsječak. Primjene računskih operacija prvoga i drugoga stupnja (II. dio)	67 — 148
§. 16. Jednadžbe prvoga stupnja s jednom nepoznanicom u aritmetičkom govoru (190)	67
§. 17. Riječima izražene jednadžbe prvoga stupnja s jednom nepoznanicom (101)	78
§. 17a. Zadaće za ponavljanje iz fizike i geometrije (78) . .	88
§. 18. Proporcije (76)	97
§. 18a. Primjene proporcija (27)	104
§. 18b. Primjeri za ponavljanje (22)	108
§. 19. Neki građanski računi (51)	112
§. 20. Jednadžbe prvoga stupnja s više nepoznanica u aritmetičkom govoru (90)	118
§. 21. Riječima izražene jednadžbe prvoga stupnja s više nepoznanica (41)	130
§. 22. Riješavanje linearnih jednadžbi s pomoću determinanta (26)	141
§. 23. Neodređene jednadžbe prvoga stupnja (67)	144

		Strana
Šesti odsječak.	Računske operacije trećega stupnja (Dio I.) . .	**149—191**
§. 24.	Kvadrat i drugi korijen (137)	149
§. 25.	Iracionalni brojevi. Računanje s iracionalnim korijenima (106)	155
§. 26.	Imaginarni brojevi (38)	160
§. 27.	Kvadratične jednadžbe s jednom nepoznanicom (129)	164
§. 27a.	Primjene kvadratičnih jednadžbi s jednom nepoznanicom (84)	172
§. 28.	Simetrične (recipročne) i binomične više jednadžbe (43)	181
§. 29.	Kvadratične jednadžbe s dvije nepoznanice (73) . . .	183
§. 29a.	Primjene kvadratičnih jednadžbi s dvije nepoznanice (46)	186
Sedmi odsječak.	Računske operacije trećega stupnja (Dio II.) .	**192—216**
§. 30.	Potencije s cijelim eksponentima (76)	192
§. 31.	Radiciranje (111)	196
§. 32.	Logaritmiranje (34)	205
§. 33.	Primjene logaritama (20)	208
§. 34.	Primjene logaritmičkih računa (72)	210
Osmi odsječak.	Progresije. Sastavljeni kamatni račun. Račun amortizacije i rente. Verižni razlomci	**217—238**
§. 35.	Aritmetičke progresije prvoga reda (51)	217
§. 36.	Geometričke progresije (50)	221
§. 37.	Sastavljeni kamatni račun. Račun amort. i renta (74)	227
§. 38.	Verižni razlomci (25)	235
Deveti odsječak.	Kombinatorika. Vjerojatnost	**239—248**
§. 39.	Tri kombinatoričke operacije (42)	239
§. 40.	Neke primjene kombinatorike (28)	242
§. 41.	Matematička vjerojatnost događaja (46)	244

Ispravci.

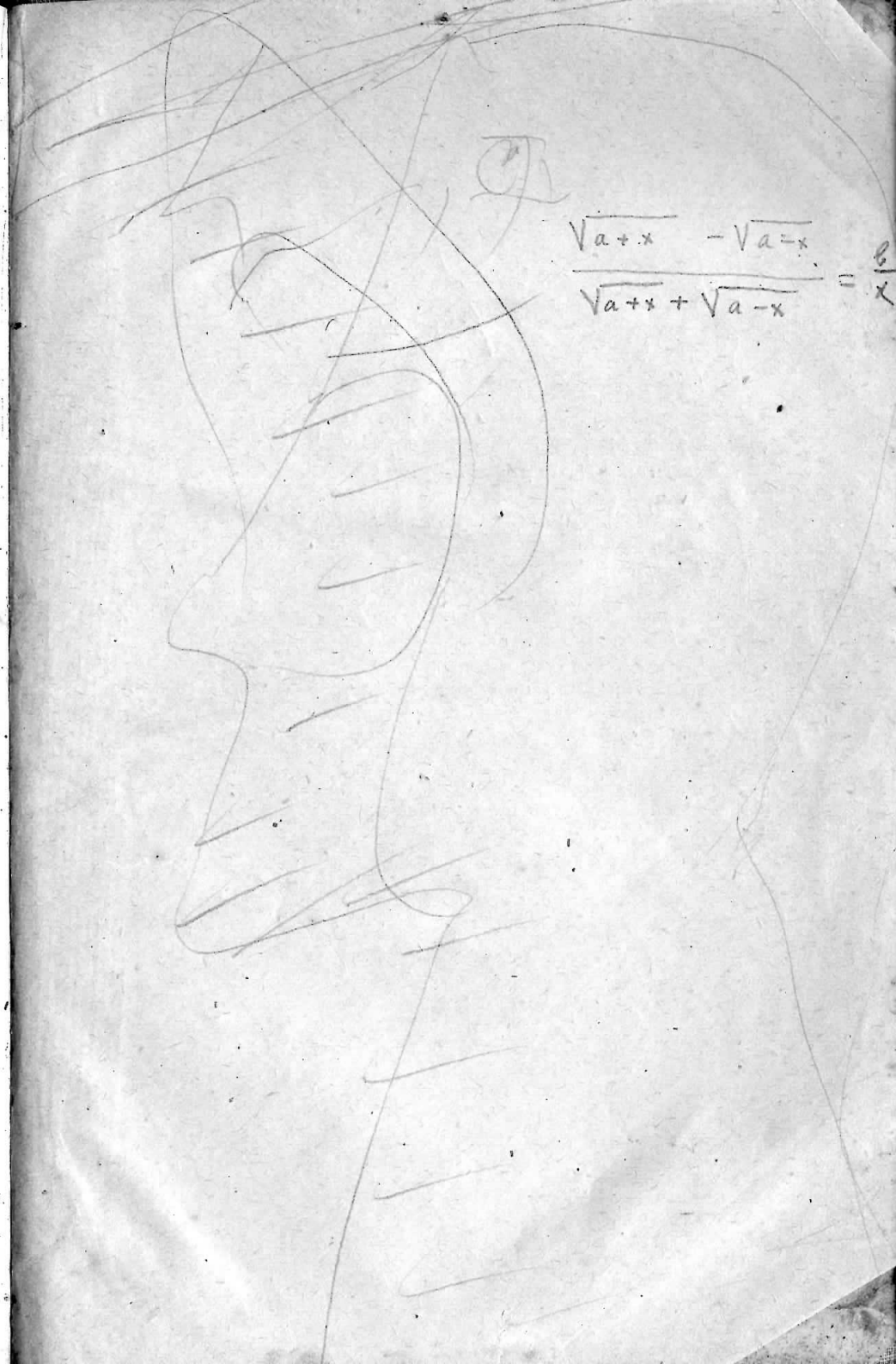
Na str. 175. u zadaći 29. treba dodati:

a) $R = 10{\cdot}8\ mm,\ a = 40\ mm,\ d = 2{\cdot}34\ mm;$

b) $R = 42{\cdot}6\ mm,\ a = 11\frac{109}{180}\ mm,\ d = 0{\cdot}36\ mm.$

Na strani 224. u zadaći 34. treba dodati:

»Odredi kvocijent te progresije.«



4

000000